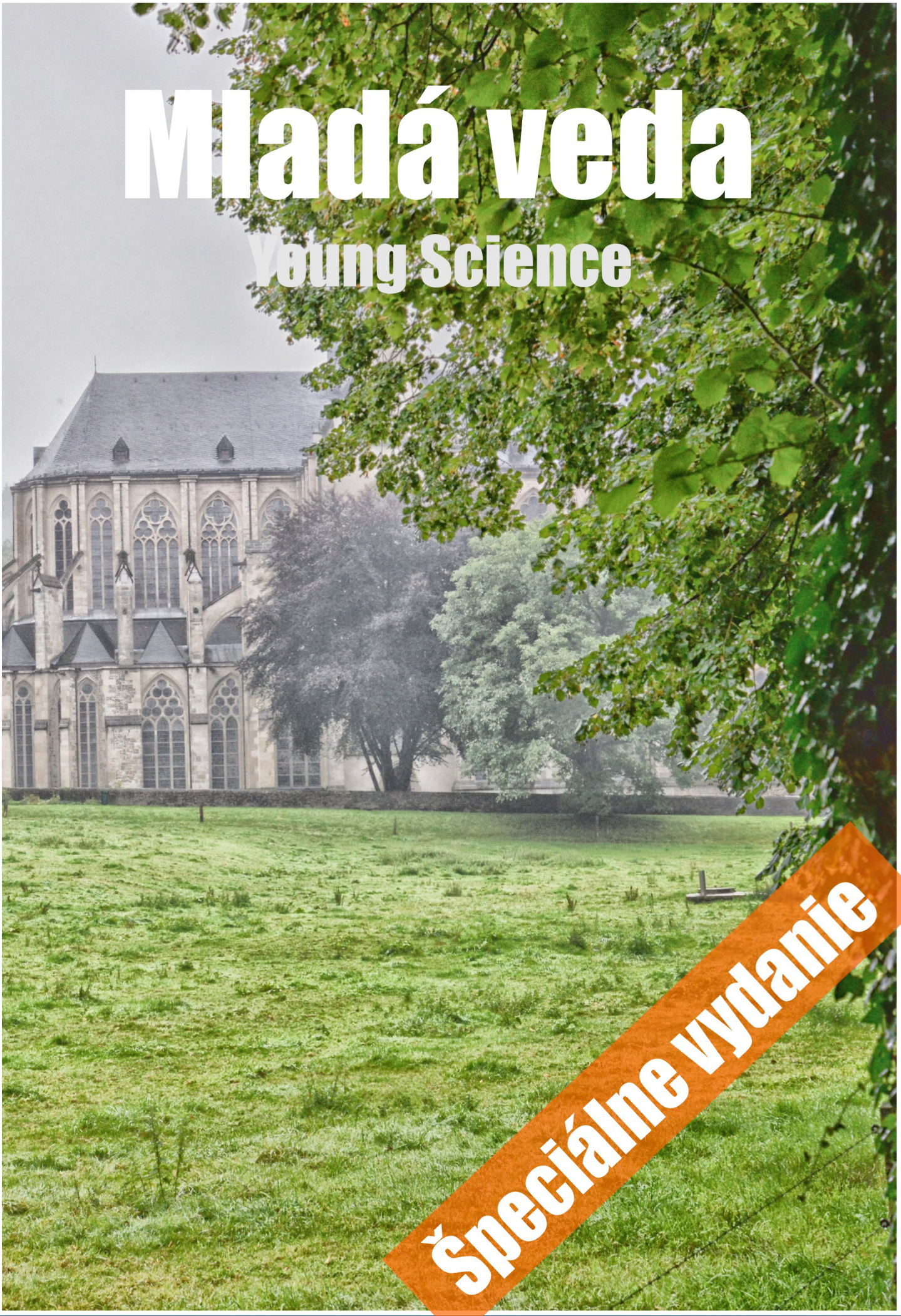
ISSN 1339-3189

September 2017

Mladá veda

Young Science



Špeciálne vydanie

www.mladaveda.sk

Mladá veda
Young Science

MEDZINÁRODNÝ VEDECKÝ ČASOPIS MLADÁ VEDA / YOUNG SCIENCE

September 2017 (číslo 4)
Ročník piaty
ISSN 1339-3189
Kontakt: info@mladaveda.sk, tel.: +421 908 546 716, www.mladaveda.sk
Fotografia na obálke: Altenberger Dom, Nemecko. © Branislav A. Švorc, foto.branisko.at

REDAKČNÁ RADA

doc. Ing. Peter Adamišin, PhD.(Katedra environmentálneho manažmentu, Prešovská univerzita, Prešov)
doc. Dr. Pavel Chromý, PhD. (Katedra sociální geografie a regionálního rozvoje, Univerzita Karlova, Praha)
prof. Dr. Paul Robert Magocsi (Chair of Ukrainian Studies, University of Toronto; Royal Society of Canada)
Ing. Lucia Mikušová, PhD. (Ústav biochémie, výživy a ochrany zdravia, Slovenská technická univerzita, Bratislava)
doc. Ing. Peter Skok, CSc. (Ekomos s. r. o., Prešov)
prof. Ing. Róbert Štefko, Ph.D. (Katedra marketingu a medzinárodného obchodu, Prešovská univerzita, Prešov)
prof. PhDr. Peter Švorc, CSc.,predseda (Inštitút histórie, Prešovská univerzita, Prešov)
doc. Ing. Petr Tománek, CSc. (Katedra veřejné ekonomiky, Vysoká škola báňská - Technická univerzita, Ostrava)

REDAKCIA

PhDr. Magdaléna Keresztesová, PhD. (Fakulta stredoeurópskych štúdií UKF, Nitra)
Mgr. Martin Hajduk (Inštitút histórie, Prešovská univerzita, Prešov)
RNDr. Richard Nikischer, Ph.D. (Ministerstvo pro místní rozvoj ČR, Praha)
Mgr. Branislav A. Švorc, PhD., šéfredaktor (Vydavateľstvo UNIVERSUM, Prešov)
PhDr. Veronika Trstianska, PhD. (Ústav stredoeurópskych jazykov a kultúr FSŠ UKF, Nitra)
Mgr. Veronika Zuskáčová (Geografický ústav, Masarykova univerzita, Brno)

VYDAVATEĽ

Vydavateľstvo UNIVERSUM, spol. s r. o.
www.universum-eu.sk
Javorinská 26, 080 01 Prešov
Slovenská republika

© Mladá veda / Young Science. Akékoľvek šírenie a rozmnožovanie textu, fotografií, údajov a iných informácií je možné len s písomným povolením redakcie.

Mladá veda
Young Science
ISSN 1339-3189

Vol. 5 (4), pp. 35-43

MODELY HOMOGENNÍCH GEOMETRICKÝCH STRUKTUR

MODELS OF HOMOGENEOUS GEOMETRICAL STRUCTURES

Zdeněk Dušek[1]

Autor působí na Vysoké škole technické a ekonomické v Českých Budějovicích. Ve svém výzkumu se věnuje diferenciální geometrii, zejména homogenním varietám.

The author works at the Institute of Technology and Business in České Budějovice. He is focused on differential geometry, in particular on homogeneous manifolds.

Abstract
In this paper, we illustrate the basic settings in modern differential geometry. We focus in particular on the *homogeneity* of a manifold or of certain geometrical structure. Natural gemetrical consideration in this situation leads to an algebraic structure called *homogeneous model* which reflects most information about the original space, manifold or structure, but further work with this structure is easier. Our constructions can be done in full generality, but for easier understanding, we restrict our considerations only to well known surfaces in the threedimensional Euclidean space. We illustrate our main ideas with the appropriate pictures.
Key words: Manifold, homogeneous manifold, Lie group, action of a group

Abstrakt
V tomto článku se zaměříme na ilustraci základních pojmů moderní diferenciální geometrie. Směřovat budeme zejména k pojmu *homogenity* prostoru, variety či některé geometrické stuktury. Přirozenou geometrickou úvahou se v této situaci získá algebraická stuktura, nazývaná někdy *homogenní model*, ve které je obsažena většina informací o původním prostoru, varietě či stuktuře, ale následná práce s ní je snazší. Naše úvahy lze provádět v plné obecnosti, pro lepší představu a porozumění u čtenáře však uvažujeme pouze důvěrně známé a snadno představitelné plochy v třírozměrném euklidovském prostoru. Vždy když je to možné, je výklad doplněn vhodnými názornými obrázky.
Klíčová slova: Varieta, homogenní varieta, Lieova grupa, akce grupy

Topologie a geometrie variet

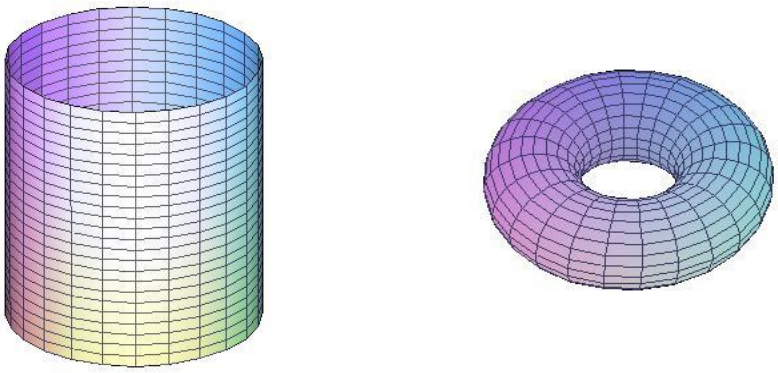
Většina čtenářů si dokáže velmi dobře intuitivně představit rovný dvourozměrný prostor - euklidovskou rovinu, kterou obvykle značíme E2, a taktéž třírozměrný euklidovský prostor E3 – náš subjektivné vnímaný prostor kolem nás. Tyto prostory, naší přeststavě přirozené

[1] Adresa pracoviště: Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích, Okružní 517/10, 37001 České Budějovice, Česká Republika
E-mail: zdusek@mail.vstecb.cz

velmi blízké, jsou topologicky velice jednoduché a geometricky takzvaně *ploché*. V moderní geometrii, ale i v matematice obecně či ve fyzice, je však potřeba pracovat se složitějšími prostory, které zohledňují specifické požadavky abstraktních matematických teorií nebo přirozeně vystihují fyzikálně zjištěné vlastnosti objektivní reality (např. zakřivený prostoročas), která je globálně mnohem komplikovanější, než jak jí známe z lokálních měření v omezených pozemských podmínkách.

Každý dobře zná takzvanou dvourozměrnou sféru, kterou budeme značit S2 a jedná se o povrch třírozměrné koule. Také není těžké si představit takzvaný torus či anuloid, který budeme značit T2 a jedná se o povrch pneumatiky, či americké koblihy. Na příkladech roviny E2 a toru T2 snadno ukážeme rozdil v topologii těchto variet. Jednou z topologických vlastností prostoru je, kolik různých uzavřených smyček je v něm možné realizovat. Tyto smyčky samozřejmě nesmí jít spojitě deformovat jedna na druhou. Představíme-li si tyto smyčky jako gumičky navléknuté na T2, snadno vidíme, že na anuloidu jich existuje nekonečně mnoho. Na rovině však nikoliv, protože tam je možné každou smyčku spojitě stáhnout do jediného bodu. Také na sféře S2 lze každou smyčku stáhnout do jediného bodu. Pro topologické rozlišení roviny E2 a sféry S2 bychom potřebovali dvourozměrné smyčky, což je již poměrně abstraktní úvaha.

Ještě zmíníme příklad rotační válcové plochy, kterou budeme značit V2 a nazývat stručně válec. Válec si také každý dokáže spojit s konkrétními cylindrickými objekty z každodenního života. Jeho topologie je opět jiná než topologie roviny, sféry či anuloidu, jak se lze lehce přesvědčit.



Obr 1 – Příklady variet – válec a torus

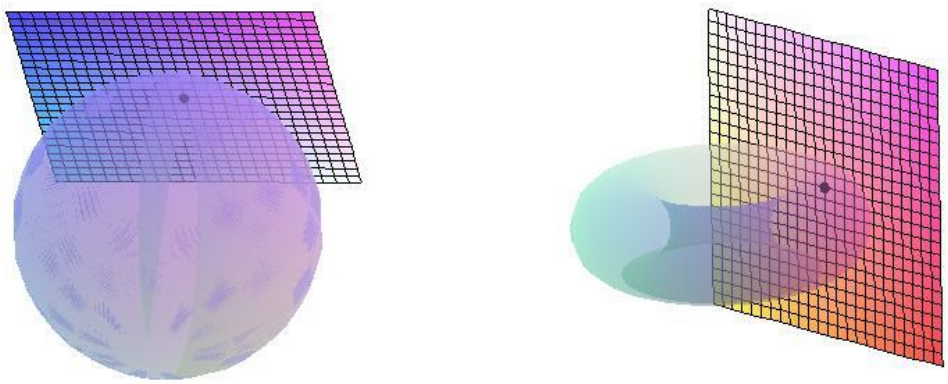
Všechny zmíněné plochy: euklidovská rovina E2, sféra S2, torus T2 a válec V2 jsou příklady takzvanách variet a jejich dimenze je rovna 2.

Varieta je základním prostorem, se kterým se v moderní geometrii a ve fyzice pracuje a na kterém se dále zavádějí další matematické struktury. Základní vlastností variety dimenze 2 je, že každý její malý kousek vypadá skoro stejně jako kousek roviny. Proto říkáme, že lokálně (na malém kousku) je její topologie úplně stejná jako topologie roviny. Globálně však může být varieta velice složitě zapletená, pokroucená, zprohýbaná, i mnohem více než jak ukazují naše příklady a než si vůbec dokážeme představit.

Výše uvedené 'skoro' se netýká topologie variety, ale její geometrie, což je struktura přidaná navíc až ke konkrétní topologii. Zkusme například měřit součet vnitřních úhlů v trojúhelníku sestrojeném v rovině a v trojúhelníku sestrojeném na sféře. V rovině to není těžké, protože víme co je přímka, co je trojúhelník a jak se měří úhel svíraný přímkami. Na varietě, například na sféře, ale potřebujeme nejprve ukázat existenci křivek, které budou plnit úlohu přímek a ze kterých budeme sestrojovat trojúhelníky. Chceme totiž přirozeně, aby každé tři body určovaly právě jeden trojúhelník. Pak již stačí zavést měření úhlu svíraného takovými křivkami. Prvním důležitým krokem je aproximace kousku variety tečným prostorem v bodě.

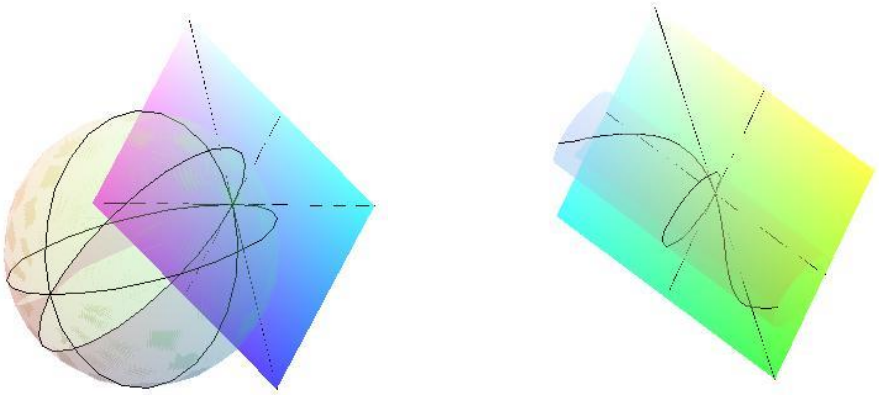
Tečný prostor variety

V našich příkladech je tečným prostorem v bodě tečná rovina, tak jak si ji intuitivně představujeme. Pokud čtenář zná pojem tečné přímky ke křivce, pak tečný prostor v daném bodě je možné vnímat jako množinu tečných přímek v daném bodě ke všem křivkám ležícím na dané varietě a procházející daným bodem.



Obr 2 – Tečné prostory sféry a toru v daném bodě

Křivka tedy leží na varietě a prochází zadaným bodem, tečna je přímka v tečném prostoru a také prochází zadaným bodem. Není těžké si všimnout, že více křivek může mít stejnou tečnu. Velice důležitá je skutečnost, že v mnoha geometrických situacích je možné ke každé přímce procházející počátkem v tečném prostoru přiřadit jedinou význačnou křivku na varietě, takzvanou *geodetiku*. To je možné například v situacích, kdy zadaná geometrická struktura umožňuje měřit délky. Všechny naše příklady ploch jsou topologicky vnořené do euklidovského prostoru E3, ve kterém délky měřit umíme a tato schopnost se přenáší i na naše plochy. Například na sféře S2 získáme jako geodetiky právě všechny hlavní kružnice, tedy kružnice ležící zároveň na sféře a na některé rovině procházející středem sféry. Uvažujeme-li tečnou rovinu sféry k severnímu pólu, pak každé přímce ležící v tečné rovině a procházející počátkem odpovídá geodetika, kterou je některý poledník na sféře. Na válci jsou geodetikami kružnice, přímky a šroubovice.



Obr 3 – Geodetiky na sféře a na válci odpovídající přímkám v tečném prostoru

Můžeme si všimnout, že geodetika je v našich příkladech křivkou, která každé dva své dostatečně blízké body spojuje po nejkratší možné dráze. To je nepatrně modifikovaná vlastnost přímek v rovině, které jsou vždy nejkratší spojnicí jakýchkoliv svých bodů. Hloubavý čtenář se jistě pobaví úvahou, že na válci jdou dva obecně zvolené body spojit nekonečně mnoha šroubovicemi, z nichž každá má jinou délku. Nyní je již patrné, že naše trojúhelníky budeme sestrojovat z geodetik a úhly mezi dvěma geodetikami budeme měřit mezi odpovídajícími přímkami v tečné rovině. Čtenář jistě ví, že v jakémkoliv trojúhelníku v rovině naměří součet vnitřních úhlů stejný, a to 180 stupňů. Obrázek ale naznačuje, že na sféře existuje trojúhelník (sestavený z hlavních kružnic), ve kterém jsou všechny úhly pravé a jejich součet je 270 stupňů. Menší trojúhelníky mají součet úhlů menší, ale nikdy ne 180 stupňů a méně. Větší trojúhelníky mají součet úhlů ještě větší.

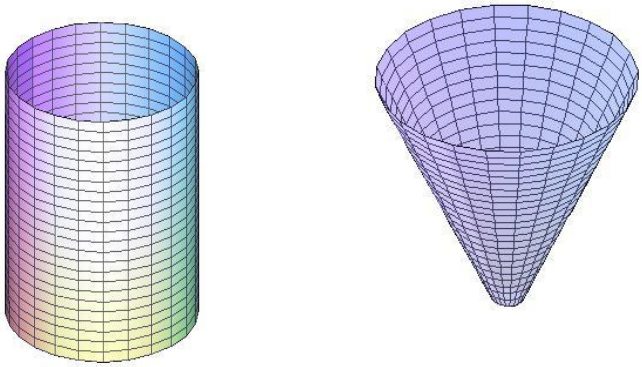
Obr 4 – trojúhelník se třemi pravými úhly a trojůhelník se dvěma pravými a jedním ostrým úhlem na sféře

Na malém trojúhelníku sestrojeném na velké sféře tedy měřením součtu vnitřních úhlů téměř nepoznáme rozdíl od roviny. Součet úhlů v trojúhelníku je geometrická vlastnost variety a uvedené pozorování nám ukazuje, že hodně velká sféra má v tomto smyslu lokální geometrii podobnou geometrii roviny a čím menší sféra je, tím více je znát rozdílná geometrie od geometrie roviny. Jedna z geometrických veličin je křivost, která popisuje například takovéto

vlastnosti variety. V našich příkladech je křivost určena tím, jak je konkrétní topologická plocha vnořená do prostoru E3.

Grupa transformací

Uvažujme nyní spojité transformace variet. Tedy zobrazení jedné variety na druhou, které je vzájemně jednoznačné a existuje k němu tedy inverzní zobrazení druhé variety zpět na první varietu. Navíc obě tato zobrazení musí zobrazovat blízké body opět na blízké body, speciálně tedy nesmí varietu nikde trhat, tím by změnila její topologii. Je skoro zřejmé, že dvě variety s různou topologií nelze spojitě transformovat jednu na druhou. Je možné například spojitě transformovat sféru na větší nebo menší sféru, což odpovídá známe situaci nafukování nebo naopak smrskávání balónku. Označíme-li K2 poloviční kužel bez vrcholu, obdržíme varietu, kterou je možné spojitě transformovat na válec.



Obr 5 – Válec a kužel jsou topologicky ekvivalentní

Čtenář jistě snadno nahlédne, že zmíněné transformace sféry na větší či menší sféru i transformace kužele K2 na válec V2 sice zachovávají topologii variet, ale nezachovávají vzdálenosti bodů. Jak jsme již zmínili, vzdálenosti bodů jsou určeny až dodatečnou geometrickou strukturou, kterou je v našich příkladech metrika.

V našem výkladu jsme poněkud zamlčeli, že k topologii je potřeba nejprve přidat takzvanou *hladkou strukturu* a pak teprve geometrickou strukturu, například metriku. Technické zavedení hladké struktury je totiž poměrně abstraktní a pro základní představu o tématu v rámci tohto článku se bez něho můžeme obejít. Ve všech našich příkladech pracujeme mlčky se standardní hladkou strukturou.

Vraťme se tedy ke spojitým transformacím variet. Chtěli bychom uvažovat všechny spojité transformace dané topologické variety na sebe, které ale navíc zachovávají danou geometrickou strukturu, v našem případě metriku, tedy i vzdálenosti bodů. Například válec V2 můžeme libovolně otočit kolem jeho osy nebo libovolně posunout ve směru jeho osy a vzdálenost jakýchkoliv dvou bodů na V2 bude stejná před transformací i po transformaci. Tyto transformace tedy zachovávají metrickou strukturu a nazývají se *izometrie*. Snadno pozorujeme, že složení libovolných dvou izometrických transformací uvedených typů stejně jako transformace nazpátek jsou opět izometrie. Proto mluvíme o *grupě transformací*.

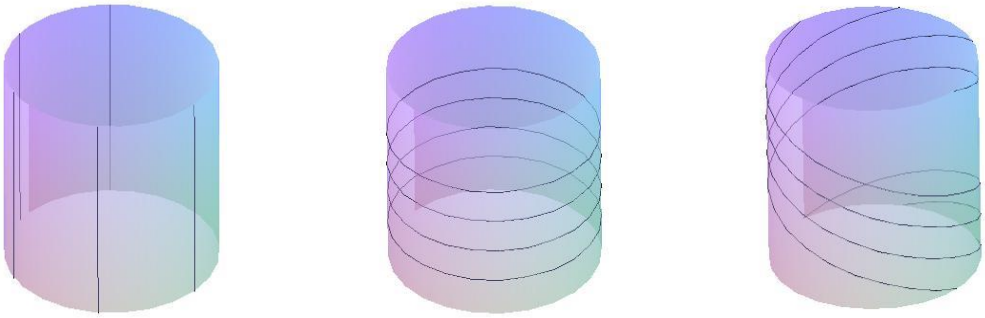
Dále, zvolíme-li pevně některý bod na válci V2 za počátek, pak pro každý jiný bod na V2 existuje transformace z uvedené grupy, která zobrazí náš počátek na tento bod. V takovém případě mluvíme o *homogenní varietě*. Čtenář jistě přijde na to, že uvažovanou grupu transformací válce zachovávajících délky můžeme ještě rozšířit pomocí zrcadlení. Takové případné rozšíření ale nemá zásadní vliv na prováděné úvahy, neboť i dimenze rozšířené grupy bude rovna 2.

Ještě zajímavější z našich příkladů je sféra S2. Jistě rotace kolem jakékoliv osy (procházející středem sféry) o jakýkoliv úhel zachovává vzdálenosti bodů na S2. Budeme tedy uvažovat grupu tvořenou těmito transformacemi. Homogenitu S2 ověříme velmi snadno: stačí pro každé dva body na S2 najít vhodnou rotaci, která zobrazí jeden z nich na druhý. Jistě přímka kolmá na rovinu určenou těmito dvěma body a středem sféry a procházející středem sféry bude osa hledané rotace. Zajímavost tohoto příkladu spočívá v tom, že sféra S2 má dimenzi 2 (bod na ní lze jednoznačně určit pomocí dvou parametrů, například pomocí zeměpisné šířky a zeměpisné délky) a dimenze uvažované grupy je 3. Vskutku, u našich rotací, dva parametry určují směr osy rotace a třetí parametr určuje úhel rotace. U jakékoliv homogenní variety je dimenze grupy transformací alespoň taková jako dimenze variety.
Jako příklad nehomogenní variety uveďme výše zmíněný polokužel K2 bez vrcholu. Transformace zachovávající vzdálenosti na K2 jsou pouze rotace kolem jeho osy. Jsou-li tedy na K2 zvoleny dva body na různě velkých kružnicích (v přirozených souřadnicích v různé výšce), pak neexistuje transformace zachovávající délky zobrazující jeden z těchto bodů na druhý. Čtenář jistě sám přijde na to, že i torus T2 vnořený do E3 tak jako na obrázcích výše je nehomogenní varietou. V obou těchto případech má grupa transformací zachovávajících vzdálenosti dimenzi pouze 1.

Jednoparametrické grupy transformací, orbity

Na celou situaci s homogenní varietou je možné nahlížet tak, že pevně zvolený počátek je možné zobrazit do libovolného jiného bodu postupně. Známe-li směr potřebné transformace, pak všechny transformace v tomto směru tvoří takzvanou *jednoparametrickou podgrupu* naší grupy.

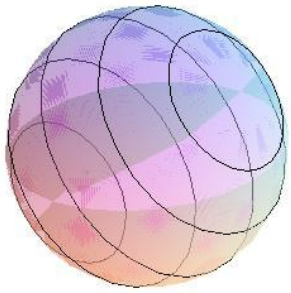
Na válci V2 si to můžeme snadno představit jako všechna posunutí ve směru jeho osy, kde parametrem může být vzdálenost o kterou posouváme. Podobně pro všechny rotace okolo jeho osy může být parametrem úhel o který rotujeme. Pro šroubovitý pohyb, který válec zároveň posouvá ve směru jeho osy a zároveň okolo této osy rotuje, může být parametrem kterýkoliv z výše uvedených. Důležité pozorování ukazuje, že náš počátek při působení takovou jednoparametrickou grupou cestuje po takzvané orbitě postupně až do cílového bodu. Přitom všechny geometrické veličiny odvozené od struktury zachovávané danou grupou se podél této orbity nemění, geometrie variety je tedy ve všech bodech podél orbity stejná.



Obr 6 – Orbity některých bodů při jednoparametrických transformacích válce

Provedeme-li podobné úvahy na sféře S2, vidíme, že pro každý směr v tečném prostoru počátku existuje rotace, která počátkem pohybuje daným směrem. Je-li počátek například severní pól, pak jeho orbity při těchto rotacích jsou právě poledníky na S2. Kromě takových rotací ale existují i rotace, které počátkem nikam nepohybují. Tyto rotace tvoří takzvanou *izotropickou podgrupu* a pro sféru S2 a pro počátek na severním pólu jsou to právě rotace kolem osy procházející středem sféry a severním pólem. Dimenze izotropické grupy je v tomto příkladu rovna 1 a obecně je to vždy rozdíl dimenze grupy transformací a dimneze variety.

Snadno si všimneme, že pomocí izotropické grupy počátku je možné každý směr v tečném prostoru severního pólu sféry S2 zobrazit na libovolný jiný směr v tomto bodě. Protože i izotropická grupa zachovává danou geometrickou strukturu, je geometrie sféry stejná nejen ve všech bodech, ale i ve všech směrech.



Obr 7 – Orbity některých bodů při jednoparametrických transformacích sféry

Vidíme tedy, že pro popis geometrie homogenních variet stačí znát tuto geometrii v jediném bodě – v počátku. Geometrickými veličinami mohou být například křivosti geodetik vycházejících z počátku v různých směrech. Na válci V2 vidíme názorně, že geodetika ve směru jeho osy je přímka - křivá tedy není, zatímco geodetika ve směru kolmém k jeho ose je kružnicí, křivá tedy je. Na sféře S2 jsou geodetiky ve všech směrech hlavní kružnice a jsou

tedy křivé všechny stejně, což je důsledek existence izotropické podgrupy, jak jsme již viděli. Tyto veličiny jsou tedy ve skutečnosti definované na tečném prostoru počátku.

Homogenní model

Jedna ze základních geometrických konstrukcí je vzájemně jednoznačné ztotožnění bodů variety s takzvanými rozkladovými třídami grupy transformací podle izotropické podgrupy. Rozkladová třída bodu variety je tvořena všemi prvky grupy, které zobrazí počátek na tento bod. Každá rozkladová třída je tak velká, jako izotropická podgrupa. Velmi důležitá je skutečnost, že se na množině těchto rozkladových tříd indukuje topologická i geometrická struktura stejná jako na původní varietě. Navíc tečný prostor variety je možné ztotožnit s invariantním podprostorem v Lieově algebře příslušné ke grupě transformací, která je Lieovou grupou. Podrobný popis této konstrukce přesahuje rámec tohoto článku, je možné jej najít například v knihách autorů Helgasona (1978) nebo Kobayashiho a Nomizu (1963). (Protože teorie Lieových grup a jejich Lieových algeber je hluboce rozpracovaná, je uvedená konstrukce velmi silným nástrojem pro popis geometrie homogenních variet. S touto zajímavou tématikou, která má i mnoho jiných aplikací v matematice a fyzice se může čtenář seznámit například v knihách Hall (2003) a Humpreys (1972).

Bystrému čtenáři jistě neunikla skutečnost, že na válci V2 i na sféře S2 jsou geodetiky totožné s orbitami akce. Takovým geodetikám říkáme *homogenní geodetiky*. Zajímavá otázka, zda na každé homogenní varietě existuje alespoň jedna homogenní geodetika byla kladně zodpovězena pro poměrně širokou třídu variet postupně v pracích Kowalski a Szenthe (2000), Dušek, Kowalski a Vlášek (2009) a Dušek (2010). Varietám, na kterých je každá geodetika homogenní, říkáme *g.o. variety*. Mnoho homogenních prostorů tuto pěknou vlastnost má, například všechny Lieovy grupy s biinvariantní metrikou (případ válce) nebo všechny symetrické prostory (případ sféry). Tato tématika byla studována mnoha autory, například v pracích Alekseevsky a Arvanitoyeorgos (2007), Alekseevsky a Nikonorov (2009), Dušek, Kowalski a Nikčevic (2010), Gordon (1996), Kowalski a Nikčevic (1999), Kowalski a Vanhecke (1991), Nikonorov (2013), Nikonorov (2017) a výzkum v této oblasti je stále aktuální. Základní přehled o této tématice je možné získat z článku autora Duška (2009).

Závěr

Představili jsme některé základní geometrické úvahy, zejména pojmy variety, tečného prostoru a geodetik. Přiblížili jsme také abstraktní pojmy homogenita variety, grupa transformací, orbity akce, dále pojmy izotropická podgrupa, homogenní model. Uvedli jsme zdroje pro možné další studium související tématiky.

Tento článek doporučil k publikování ve vědeckém časopise Mladá veda RNDr. Martin Swaczyna, Ph.D.

Použitá literatura

1. HALL, B.C., 2003. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. An Elementary Introduction.* New York: Springer Verlag.
2. HELGASON, S., 1978. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.* New York, San Francisco, London: Academic Press.

3. HUMPHREYS, J.E., 1972. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. New York: Springer Verlag.
4. KOBAYASHI, S. a K. NOMIZU, 1963. *Foundations of Differential Geometry*. New York, London: Interscience Publishers.
5. ALEKSEEVSKY, D. a A. ARVANITOYEORGOS, 2007. Riemannian flag manifolds with homogeneous geodesics, In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 359, 3769-3789.
6. ALEKSEEVSKY, D. a YU.G. NIKONOROV, 2009. Compact Riemannian manifolds with homogeneous geodesics, In: *SIGMA* 5, 093, 16 pages.
7. DUŠEK, Z., 2009. Survey on homogeneous geodesics, In: *Note Mat.* 28, suppl. n. 1, 147-168.
8. DUŠEK, Z., 2010. The existence of homogeneous geodesics in homogeneous pseudo-Riemannian and affine manifolds, In: *J. Geom. Phys.* 60, 687-689.
9. DUŠEK, Z., O. KOWALSKI a S. NIKČEVIC, 2004. New examples of Riemannian g.o. manifolds in dimension 7, In: *Differ. Geom. Appl.* 21, 65-78.
10. DUŠEK, Z., O. KOWALSKI a Z. VLÁŠEK, 2009. Homogeneous geodesics in homogeneous affine manifolds, In: *Result. Math.* 54, 273-288.
11. GORDON, C., 1996. Homogeneous Riemannian Manifolds Whose Geodesics are Orbits, In: *Prog. Nonlinear Differ. Eq. Appl.* 20, 155-174.
12. KOWALSKI, O. a S.Ž. NIKČEVIC, 1999. On geodesic graphs of Riemannian g.o. spaces, In: *Arch. Math.* 73, 223-234;
13. KOWALSKI, O. a J. SZENTHE, 2000. On the existence of homogeneous geodesics in homogeneous Riemannian manifolds, In: *Geom. Dedicata* 81, 209--214.
14. KOWALSKI, O. a L. VANHECKE, 1991. Riemannian manifolds with homogeneous geodesics, In: *Boll. Un. Math. Ital.* B(7) 5, 189-246.
15. NIKONOROV, YU.G., 2013, Geodesic orbit Riemannian metrics on spheres, In: *Vladikavkaz. Math. J.* 15,3, 67-76.
16. NIKONOROV, YU.G., 2017. On the structure of geodesic orbit Riemannian spaces, In: *Ann Glob Anal Geom* DOI 10.1007/s10455-017-9558-0.