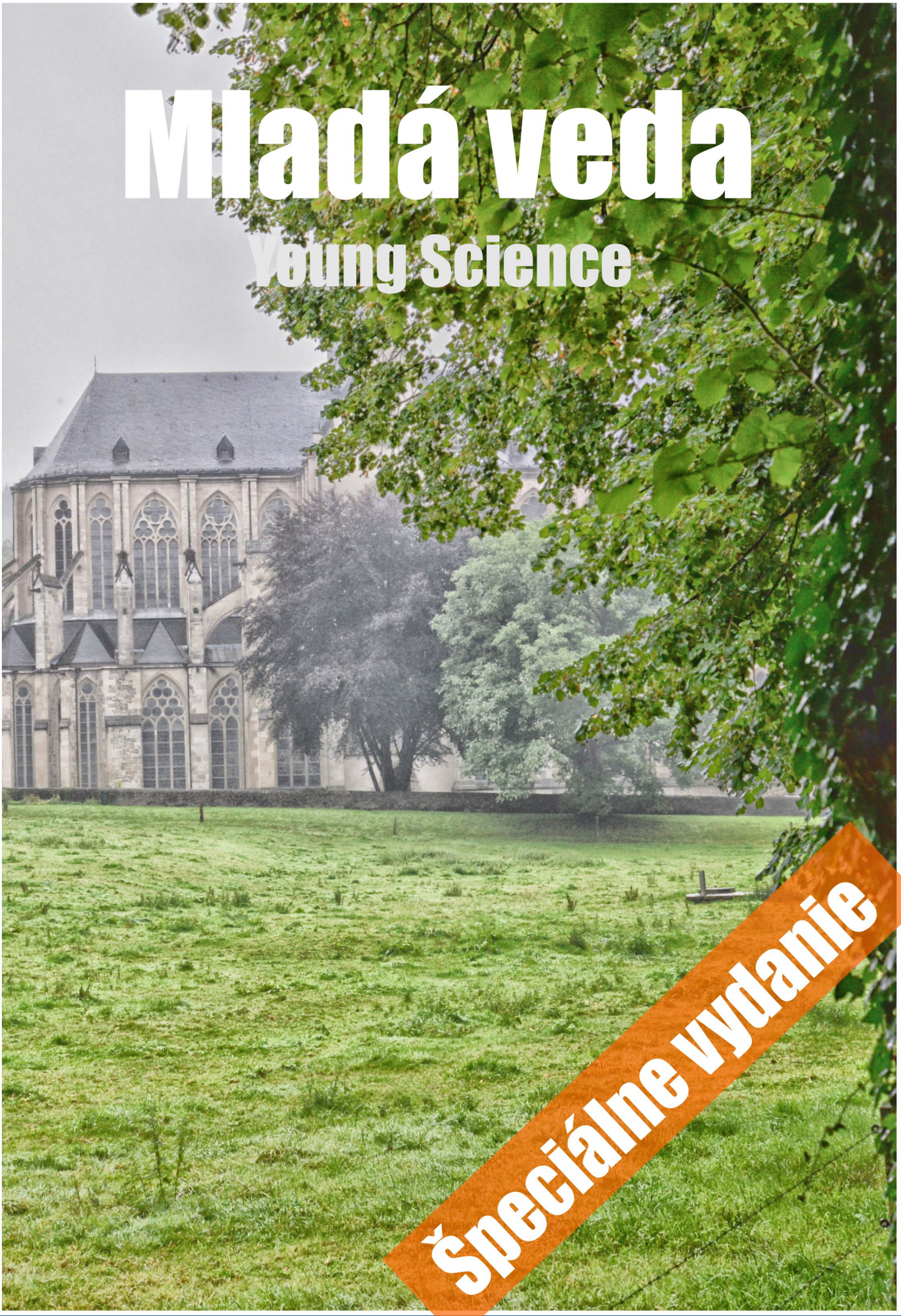
ISSN 1339-3189

September 2017

Mladá veda

Young Science



Špeciálne vydanie

www.mladaveda.sk

Mladá veda
Young Science

MEDZINÁRODNÝ VEDECKÝ ČASOPIS MLADÁ VEDA / YOUNG SCIENCE

September 2017 (číslo 4)
Ročník piaty
ISSN 1339-3189
Kontakt: info@mladaveda.sk, tel.: +421 908 546 716, www.mladaveda.sk
Fotografia na obálke: Altenberger Dom, Nemecko. © Branislav A. Švorc, foto.branisko.at

REDAKČNÁ RADA

doc. Ing. Peter Adamišin, PhD.(Katedra environmentálneho manažmentu, Prešovská univerzita, Prešov)
doc. Dr. Pavel Chromý, PhD. (Katedra sociální geografie a regionálního rozvoje, Univerzita Karlova, Praha)
prof. Dr. Paul Robert Magocsi (Chair of Ukrainian Studies, University of Toronto; Royal Society of Canada)
Ing. Lucia Mikušová, PhD. (Ústav biochémie, výživy a ochrany zdravia, Slovenská technická univerzita, Bratislava)
doc. Ing. Peter Skok, CSc. (Ekomos s. r. o., Prešov)
prof. Ing. Róbert Štefko, Ph.D. (Katedra marketingu a medzinárodného obchodu, Prešovská univerzita, Prešov)
prof. PhDr. Peter Švorc, CSc.,predseda (Inštitút histórie, Prešovská univerzita, Prešov)
doc. Ing. Petr Tománek, CSc. (Katedra veřejné ekonomiky, Vysoká škola báňská - Technická univerzita, Ostrava)

REDAKCIA

PhDr. Magdaléna Keresztesová, PhD. (Fakulta stredoeurópskych štúdií UKF, Nitra)
Mgr. Martin Hajduk (Inštitút histórie, Prešovská univerzita, Prešov)
RNDr. Richard Nikischer, Ph.D. (Ministerstvo pro místní rozvoj ČR, Praha)
Mgr. Branislav A. Švorc, PhD., šéfredaktor (Vydavateľstvo UNIVERSUM, Prešov)
PhDr. Veronika Trstianska, PhD. (Ústav stredoeurópskych jazykov a kultúr FSŠ UKF, Nitra)
Mgr. Veronika Zuskáčová (Geografický ústav, Masarykova univerzita, Brno)

VYDAVATEĽ

Vydavateľstvo UNIVERSUM, spol. s r. o.
www.universum-eu.sk
Javorinská 26, 080 01 Prešov
Slovenská republika

© Mladá veda / Young Science. Akékoľvek šírenie a rozmnožovanie textu, fotografií, údajov a iných informácií je možné len s písomným povolením redakcie.

Mladá veda
Young Science
ISSN 1339-3189

Vol. 5 (4), pp. 190-193

DVA LAGRANGIÁNY ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

TWO ELECTROMAGNETIC FIELD LAGRANGIANS

Dana Smetanová[1]

Dana Smetanová působí jako odborná asistentka na Katedře informatiky a přírodních věd, Ústavu technicko-technologického, Vysoké školy technické a ekonomické v Českých Budějovicích v České republice. Ve svém výzkumu se věnuje problematice variačního počtu, diferenciální geometrie a aplikacím.

Dana Smetanová works as an assistant professor at the Department of Informatics and Natural Sciences of the Faculty of Technology at the Institute of Technology and Bussines in České Budějovice in Czech Republic. Her research is devoted to variational calculus, differential geometry and applications.

Abstract
The article is devoted to some properties of the equivalent Lagrangians. The theory is illustrated by two electromagnetic Lagrangians. One of the Lagrangians is regular and the other one is not.
Key words: Lagrangian, Euler – Lagrange equations, Hamilton equations, regularity

Abstrakt
V článku jsou zkoumány některé vlastnosti ekvivalentních lagrangiánů. Teorie je ilustrována na příkladů dvou různých ekvivalentních lagrangiánů elektromagnetického pole. Přičemž jeden z nich je regulární a druhý ne.
Klíčová slova: lagrangián, Eulerovy – Lagrangeovy rovnice, Hamiltonovy rovnice, regularita

Úvod

Problematika popisu světa pomocí matematického aparátu sahá do hluboké minulosti. S počátky moderního popisu jsou spjatí významní matematikové a fyzikové, jako např. Newton, Hamilton, Euler, Jacobi, Legendre. Podstatným objektem popisu se stal lagrangián, což je funkce, která popisuje dynamiku fyzikálního systému. Z této funkce obvyklým postupem získáme pohybové, nebo též Eulerovy - Lagrangeovy rovnice popisující vývoj systému. Jedná se o soustavu parciálních diferenciálních rovnic. Jak je všeobecně známo, tyto rovnice jsou náročné z hlediska řešení.

[1] Adresa pracoviště: RNDr. Dana Smetanová, Ph.D., Vysoká škola technická a ekonomická, Okružní 517/10, 370 01 České Budějovice, Česká republika
E-mail: smetanova@mail.vstecb.cz

Již v první polovině 19. století se na tuto problematiku W. R. Hamilton a C. R. Jacobi podívali trošku jiným způsobem. Eulerovy – Lagrangeovy rovnice nahradili novou sadou parciálních diferenciálních rovnic, pro daný fyzikální systém, takových, aby byly vhodněji uzpůsobené integraci (jsou také nižšího řádu než Eulerovy – Lagrangeovy rovnice). Tyto rovnice byly později nazvány Hamiltonovy rovnice.

Zcela přirozeně se objevuje otázka. Za jakých podmínek mají sady popisující daný systém „stejná“ řešení? Této podmínce se říká podmínka regularity. Lagrangiánům, které ji splňují, říkáme regulární. Zaměříme-li se na lagrangiány 1. řádu v klasické mechanice, pak tyto závisí na čase, prostorových souřadnicích a složkách rychlosti. Podmínka regularity je podmínka na regulárnost matice, která je sestavena z druhých parciálních derivací lagrangiánu 1. řádu podle složek rychlosti. Splnění této podmínky zajistí pro daný systém několik věcí. Řešení Eulerových – Lagrangeových a Hamiltonových rovnic splývají. Zároveň je možnost přejít k novému souřadnicovému systému pomocí Legendrovy transformace. Tento souřadnicový systém obsahuje impulsy místo složek rychlosti. Hledání řešení Hamiltonových rovnic je v nových souřadnicích snazší. Zobecnění provedl ve třicátých letech minulého století De Donder (1931).

Tento problém je zobecňován v několika směrech. Jedná se například o zobecnění pro mechanické problémy s lagrangiány vyššího řádu a lagrangiány popisující fyzikální problémy v teorii pole.

Většina fyzikálně významných lagrangiánů není regulární. Jedná se například o lagrangiány 1. řádu: Diracův lagrangián., lagrangián elektromagnetického pole, 2. řádu: Einsteinův lagrangián popisující teorii gravitace.

Tato problematika spadá do několika významných vědeckých oblastí, zejména do matematické fyziky a variační teorie. Pro seznámení s danou problematikou jsou vhodné přehledové publikace autorů: Rektorys (1999), Brdička a Hladík (1987), Leech (1970) a skripta Krupkové a Swaczyny (2006). Teorie mechanických systémů s využitím struktur a nástrojů diferenciální geometrie je přehledně zpracována v monografii Krupkové (1997).

Ekvivalentní lagrangiány v teorii pole

Poznamenejme, že budeme pracovat v reálném prostoru $\mathcal{R}^{m+n+mn}$. Lagrangeova funkce 1. řádu $L = L(x^i, y^\sigma, y_i^\sigma)$, kde $1 \leq i \leq n$, $1 \leq \sigma \leq m$, je popsána v souřadnicích $x^i, y^\sigma, y_i^\sigma$. Souřadnice x^i mohou být například časoprostorové souřadnice, souřadnice y^σ mohou popisovat charakteristiky pole a y_i^σ (resp. y_{ij}^σ viz níže) jsou 1. (resp. 2.) parciální derivace „ypsilonů“ podle „iks“.

Eulerovy – Lagrangeovy rovnice pro extremály $J^2\gamma$ mají v souřadnicích tvar

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y^\sigma} - d_i \frac{\partial L}{\partial y_i^\sigma}\right) \circ J^2\gamma = 0,$$

přičemž operátor $d_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial y^\sigma} y_i^\sigma + \frac{\partial}{\partial y_j^\sigma} y_{ij}^\sigma$ a používáme Einsteinovu sumační konvenci (sčítání podle stejného horního a dolního indexu). Jesliže platí podmínka regularity taková, že $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y_i^\sigma \partial y_j^\mu}\right) \neq 0$, říkáme, že lagrangián je regulární. Navíc existuje Legendrova

transformace souřadnic $(x^i, y^\sigma, y_i^\sigma) \to (x^j, y^\mu, p_\mu^j)$. Impulzy mají vyjádření $p_\mu^j = \frac{\partial L}{\partial y_j^\mu}$ a Hamiltonián $H = -L + p_\mu^j y_j^\mu = -L + \frac{\partial L}{\partial y_j^\mu} y_j^\mu$. Hamiltonovy rovnice pro extremály δ v Legendrových souřadnicích

$$\frac{\partial H}{\partial p_\mu^j} \circ \delta = \frac{\partial (y^\mu \circ \delta)}{\partial x^j}, \frac{\partial H}{\partial y^\mu} \circ \delta = -\frac{\partial \left(p_\mu^j \circ \delta\right)}{\partial x^j}.$$

Výše uvedené Hamiltonovy rovnice existují jen pro regulární lagrangiány a zároveň platí, že mezi řešeními Eulerových – Lagrangeových a Hamiltonových rovnice existuje bijektivní korespondence (tj. jsou ztožnitelné).

Věta:

Buď $h_{\vartheta\mu}^{kl} = h_{\vartheta\mu}^{kl}(x^i, y^\sigma)$ libovolné funkce splňující podmínky $h_{\vartheta\mu}^{kl} = -h_{\vartheta\mu}^{lk} = -h_{\mu\vartheta}^{kl} = h_{\mu\vartheta}^{lk}$. Buď forma $\eta = h_{\vartheta\mu}^{kl}\, dy^\vartheta \wedge dy^\mu \wedge \omega_{kl}$, kde ω_{kl} je kontrakce formy $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$ bázovými vektory $\frac{\partial}{\partial x^k}$, $\frac{\partial}{\partial x^l}$, uzavřená. Pak je lagrangián 1. řádu $\bar{L} = L + 2h_{\vartheta\mu}^{kl} y_k^\vartheta y_l^\mu$ ekvivalentní s lagrangiánem 1. řádu L, tzn. k oběma přísluší stejné Eulerovy – Lagrangeovy rovnice.

Důkaz výše uvedené věty plyne z přímého dosazení lagrangeových funkcí do Eulerových – Lagrangeových rovnic s využitím podmínek uzavřenosti formy η a antisymetrií, resp. symetrií funkcí $h_{\vartheta\mu}^{kl}$. Poznamenejme, že z $m^2 n^2$ funkcí $h_{\vartheta\mu}^{kl}$ je pouze $\frac{1}{4} mn(m-1)(n-1)$ nezávislých.

Výše uvedená věta je důsledek přístupu za použití nástrojů diferenciální geometrie (viz Krupková a Smetanová 2001, Smetanová 2016).

Dva lagrangiány elektromagnetického pole

Výše uvedený teorém ukazuje, jak vypadá jedna z možných tříd, ve které se dají hledat k danému lagrangiánu ekvivalentní lagrangiány. Přestože oba lagrangiány přísluší ke stejným Eulerovým – Lagrangeovým rovnicím, mohou mít jiné vlastnosti z hlediska regularity. Příkladem je lagrangián elektromagnetického pole. Standardně uvaděný lagrangián není regulární, tzn. k němu neexistuje Legendrova transformace a Hamiltonovy rovnice v Legendrových souřadnicích. Dá se ovšem najít lagrangián, který je tvaru z předchozí věty, je tedy ekvivalentní s původním lagrangiánem a zároveň je regulární.

Zvolme reálnou fyzikální situaci, kdy $m = n = 4$. Pro „standardní“ lagrangián elektromagnetického pole platí

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

kde $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$. Vektorový potenciál elektromagnetického pole značíme A_μ, složky Lorentzovy metriky $g_{\mu\nu}$, kde $g_{\mu\nu} = 0$ pro $\mu \neq \nu$ a $-g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = 1$. Souřadnice x^i jsou časoprostorové souřadnice, souřadnice $y^\sigma = g^{\sigma\mu} A_\mu = A^\sigma$ (pro inverzní složky platí $g^{\sigma\mu} = g_{\sigma\mu}$). Tento lagrangián ovšem není regulární a neexistuje k němu Legendrova transformace.

Podle výše uvedené věty platí, že

$$\bar{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2\left(A^{\mu}_{\mu} A^{\nu}_{\nu} - A^{\mu}_{\nu} A^{\nu}_{\mu}\right)$$

je ekvivalentní s předchozím lagrangiánem (výpočtem lze ověřit, že se jedná o tvar lagrangiánu z předchozí věty), tedy náleží ke stejným Eulerovým-Lagrangeovým rovnicím. Má ovšem zcela jiné vlastnosti, existuje k němu Legendrova transformace a Hamiltonovy rovnice v Legendrových souřadnicích (viz Krupková a Smetanová 2001).

Závěr

V teorii pole existuje třída lagrangiánů 1. řádu v níž jsou lagrangiány ekvivalentní, tedy jejich Eulerovy – Lagrangeovy rovnice jsou stejné. V této třídě mohou být lagrangiány s různými vlastnostmi. Jako konkrétní případ reálné fyzikální stituace jsou uvedené dva různé lagrangiány elektromagnetického pole, které jsou ekvivalentní. Ovšem pouze jeden z nich je regulární a je pro něj možné nalézt Legendrovu tranformaci a Hamiltonovy rovnice (podrobněji v práci Krupkové a Smetanové 2001).

Tento článok odporúčal na publikovanie vo vedeckom časopise Mladá veda: Mgr. Petr Chládek, Ph.D.

Použitá literatura

1. BRDIČKA M. a A. HLADÍK, 1987. *Teoretická mechanika*. Praha: Academia.
2. DE DONDER, TH., 1931. *Théorie invariantive du Calcul des Variations*, Paris: Gauthier- Villars.
3. KRUPKOVÁ, O., 1997. The Geometry of Ordinary Variational Equations, Berlin: Springer.
4. KRUPKOVÁ, O. a D. SMETANOVÁ, 2001. Legendre Transformation for Regularizable Lagrangians in Field Theory. In: *Letters in Mathematical Physics,* roč. 58, č. 3, s. 189 – 204.
5. KRUPKOVÁ, O. a M. SWACZYNA, 2006. *Variační počet,* [online]. [cit. 2017-08-22]. Dostupné z: http://www1.osu.cz/~rossi/UcebTextVarPoc(final)(barev).pdf
6. LEECH J. W., 1970. *Klasická mechanika,* Praha: SNTL.
7. REKTORYS, K., 1999, *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*, Praha: Academia, ISBN 80-200-0714-8.
8. SMETANOVÁ, D., 2016. *On Lepagean Equivalents and Multisymplectic forms,* APLIMAT 2016 - 15th Conference on Applied Mathematics 2016, Bratislava: STU, s. 1004-1009.