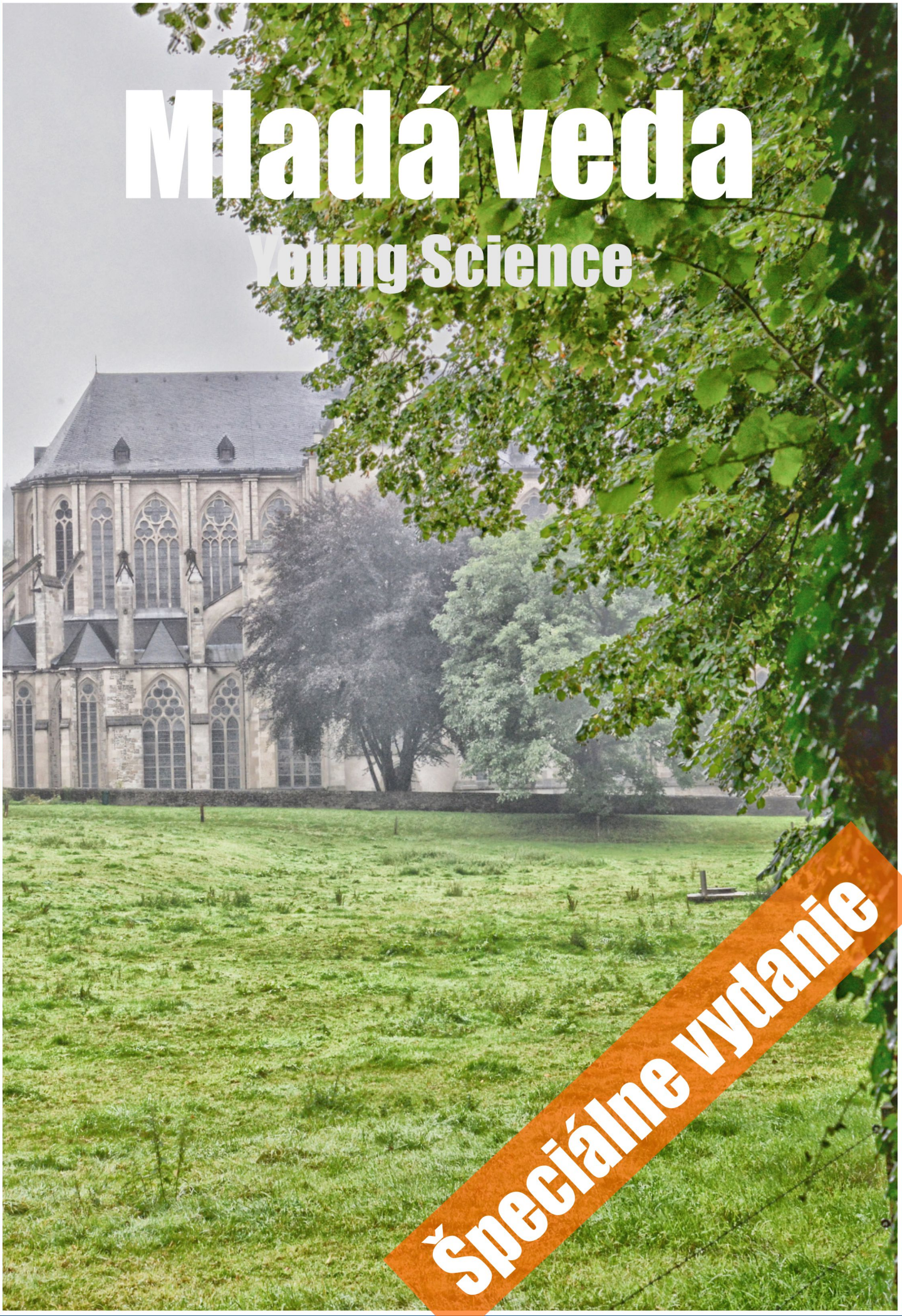
ISSN 1339-3189

September 2017

Mladá veda

Young Science



Špeciálne vydanie

www.mladaveda.sk

Mladá veda
Young Science

MEDZINÁRODNÝ VEDECKÝ ČASOPIS MLADÁ VEDA / YOUNG SCIENCE

September 2017 (číslo 4)
Ročník piaty
ISSN 1339-3189
Kontakt: info@mladaveda.sk, tel.: +421 908 546 716, www.mladaveda.sk
Fotografia na obálke: Altenberger Dom, Nemecko. © Branislav A. Švorc, foto.branisko.at

REDAKČNÁ RADA
doc. Ing. Peter Adamišin, PhD.(Katedra environmentálneho manažmentu, Prešovská univerzita, Prešov)
doc. Dr. Pavel Chromý, PhD. (Katedra sociální geografie a regionálního rozvoje, Univerzita Karlova, Praha)
prof. Dr. Paul Robert Magocsi (Chair of Ukrainian Studies, University of Toronto; Royal Society of Canada)
Ing. Lucia Mikušová, PhD. (Ústav biochémie, výživy a ochrany zdravia, Slovenská technická univerzita, Bratislava)
doc. Ing. Peter Skok, CSc. (Ekomos s. r. o., Prešov)
prof. Ing. Róbert Štefko, Ph.D. (Katedra marketingu a medzinárodného obchodu, Prešovská univerzita, Prešov)
prof. PhDr. Peter Švorc, CSc.,predseda (Inštitút histórie, Prešovská univerzita, Prešov)
doc. Ing. Petr Tománek, CSc. (Katedra veřejné ekonomiky, Vysoká škola báňská - Technická univerzita, Ostrava)

REDAKCIA
PhDr. Magdaléna Keresztesová, PhD. (Fakulta stredoeurópskych štúdií UKF, Nitra)
Mgr. Martin Hajduk (Inštitút histórie, Prešovská univerzita, Prešov)
RNDr. Richard Nikischer, Ph.D. (Ministerstvo pro místní rozvoj ČR, Praha)
Mgr. Branislav A. Švorc, PhD., šéfredaktor (Vydavateľstvo UNIVERSUM, Prešov)
PhDr. Veronika Trstianska, PhD. (Ústav stredoeurópskych jazykov a kultúr FSŠ UKF, Nitra)
Mgr. Veronika Zuskáčová (Geografický ústav, Masarykova univerzita, Brno)

VYDAVATEĽ
Vydavateľstvo UNIVERSUM, spol. s r. o.
www.universum-eu.sk
Javorinská 26, 080 01 Prešov
Slovenská republika

© Mladá veda / Young Science. Akékoľvek šírenie a rozmnožovanie textu, fotografií, údajov a iných informácií je možné len s písomným povolením redakcie.

Mladá veda
Young Science
ISSN 1339-3189

Vol. 5 (4), pp. 85-92

KRITICKÉ OTÁČKY ZUBOVÝCH ČERPADEL

CRITICAL SPEED OF GEER PUMPS

Petr Hrubý, Dana Smetanová[1]

Petr Hrubý působí jako docent na Katedře strojírenství Ústavu technicko-technologického Vysoké školy technické a ekonomické v Českých Budějovicích v České republice. Ve svém výzkumu se věnuje problematice matematického modelování strojních součástí se zaměřením na dimenzování rotujících částí mechanismů strojů.
Dana Smetanová působí jako odborná asistentka na Katedře informatiky a přírodních věd, Ústavu technicko-technologického, Vysoké školy technické a ekonomické v Českých Budějovicích v České republice. Ve svém výzkumu se věnuje problematice variačního počtu a aplikacím.

Petr Hrubý works as an asociated profesor at the Department of Mechanical Engineering of the Faculty of Technology at the Institute of Technology and Bussines in České Budějovice in Czech Republic. Him research is devoted to problems of mathematical modeling of machine parts with focus on dimensioning of rotating parts of machine mechanisms.
Dana Smetanová works as an assistant professor at the Department of Informatics and Natural Sciences of the Faculty of Technology at the Institute of Technology and Bussines in České Budějovice in Czech Republic. Her research is devoted to variational calculus applications.

Abstract
In the paper there is presented a dynamic model of the articulated shaft. The model is used for the analysis of critical angular velocities. This model can be rewritten into a computer program to handle rotating parts of gear pumps. Using the knowledge of the custom frequencies of the rotating parts one can prevent operational malfunctions of the pumps. The problems described in the contribution will serve as a basis for the formulation of critical speed of the gear pumps within the Program for Support of Applied Research and Experimental Development ALFA TA04010579 of the Technology Agency of the Czech Republic. Key words: articulated shaft, critical angular speed, geer pump

Abstrakt
V článku je prezentován dynamický model kloubového hřídele, který je využíván pro analýzu kritických úhlových rychlostí. Tento model může být přepsán do počítačového programu, pro

[1] Adresa pracoviska: doc. Ing. Petr Hrubý, CSc., RNDr. Dana Smetanová, Ph.D.,
The Institute of Technology and Bussines, Okružní 517/10, 370 01 České Budějovice, Czech Republic
E-mail: dochruby@mail.vstecb.cz, smetanova@mail.vstecb.cz

řešení rotujících částí zubových čerpadel. Využití znalosti vlastních frekvencí rotujících částí může zabránit provozním poruchám čerpadel.

Problematika popsaná v příspěvku bude sloužit jako východisko při formulaci modelu kritických otáček zubových čerpadel v rámci Programu na podporu aplikovaného výzkumu a experimentálního vývoje ALFA TA04010579 Technologické agentury České republiky.

Klíčová slova: kloubový hřídel, kritická úhlová rychlost, zubové čerpadlo

Úvod

Kloubové hřídele jsou využívány v různých typech stojů například v pohonech zubových čerpadel. V pohonech s klouby existují předpoklady pro vznik kombinovaného ohybově krouživého kmitání hřídelů (viz Hrubý 1981 a Hrubý a kol. 2017). Při formulaci matematického modelu úseku kontinua není proto opodstatněný předpoklad konstatního sklonu průhybové čáry rotujícího hřídele, který je v literatuře obvykle přijímá, ale je nutné předpokládat vznik relativního prostorového ohybového kmitání v systému hřídele, který koná unášivou rotaci úhlovou rychlostí ω.

Všechny druhy vibrací ovlivňují provozuschopnost a opotřebení čerpadel. Z tohoto hlediska jsou velmi významné vlastní frekvence, které způsobují rezonance. Pokud se otáčková rezonance objeví v provozní oblasti dochází k nevratným deformacím hřídelí.

V tomto článku je prezentován odladěný univerzální matematický model rotujících částí mechanismů strojů (hřídelí), fungující na bázi metody přenosových matic. Model byl v minulosti úspěšně použit pro výpočty kritických otáček kloubových (spojovacích) hřídelí. Výsledky modelu byly konfrontovány s výsledky experimentů a provozních zkoušek reálných pohonů nákladních automobilů.

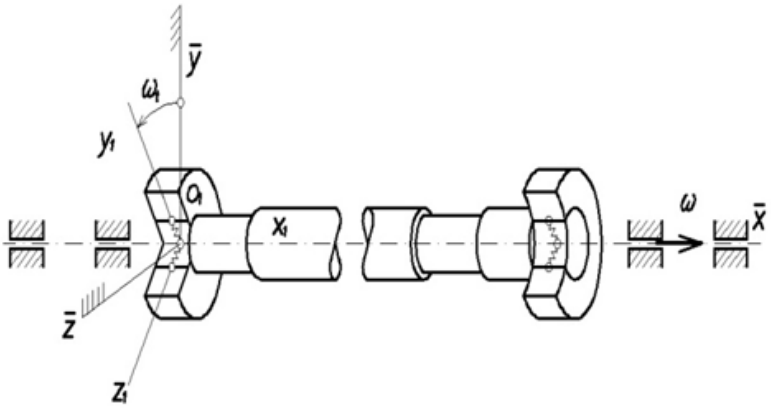
Pro potřeby grantu *TAČR č. TA04010579*, který řešíme, používáme tento model pro řešení kritických otáček rotujícíchčástí, tedy vstupní hnací a výstupní hnané hřídele zubového čerpadla.

Model a použitá metoda

Pro analýzu kritických úhlových rychlostí kloubového hřídele byl použit dynamický model znázorněný na obr. 1. Model je tvořen jednorozměrným kontinuem po částech konstantního mezikruhového průřezu, které na okrajích nese diskrétní hmoty, jimiž nahrazujeme vnitřní vidlice Hookových kloubů. Diskrétní hmoty jsou k rotujícímu systému vázány izotropně pružně posuvně fiktivními pružinami, jejichž statickou tuhost stanovíme z deformace hřídele pod účinkem známé síly.

Bližší podrobnosti o fyzikálních základech problému jsou uvedeny například v Brepta a kol. (1994).

Mladá veda
Young Science
ISSN 1339-3189
Vol. 5 (4), pp. 85-92



Obr. 1 – Dynamický model kloubového hřídele
Zdroj: vlastní

Z hlediska ohybově krouživého kmitání je úsek kontinua definován geometrickými parametry r_1, r_2, l (vnitřní poloměr, vnější poloměr, délka), hmotnostním parametrem ρ (měrná hmotnost), tuhostním parametrem E (modul pružnosti v tahu-tlaku) a dále provozním parametrem ω (úhlová rychlost unášivé rotace systému kloubového hřídele) (srovnej Hrubý a kol. 2017).

Náhrada Hookeova kloubu je určena hmotností m, diagonální maticí setrvačnosti $J_{\xi,\eta,\zeta}$ (v čase $t=0$ je $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$) a také provozním parametrem ω. Pro pružné uložení je nutno zadat parametr k (statická tuhost izotropně pružně posuvného uložení).

Dojde-li ke vzniku kombinovaného, ohybově krouživého kmitání, koná element kontinua, eventuálně diskrétní hmota, obecný prostorový pohyb složený z rotace systému kolem osy $\bar{x} = x$ konstantní úhlovou rychlostí, z posuvu systému okamžitou rychlostí a ze sférického pohybu okamžitou úhlovou rychlostí.

Vlastní frekvence Ω relativního prostorového ohybového kmitání závisí na úhlové rychlosti unášivé rotace rotujícího systému ω.

Pro soustavu je kritický stav tehdy, když je vlastní frekvence relativního kmitání právě rovna hodnotě úhlové rychlosti unášivé rotace $\Omega(\omega) = \omega\ (= \omega_{critical})$.

Vlastní frekvence $\Omega_i = \Omega_i(\omega)$ relativního prostorového ohybového kmitaní získáme například metodou přenosových matic. Jiná metoda na hledání vlastních frekvencí je uvedena například v Hrubý a kolektiv (2017).

Ve všech vzorcích budeme používat tučná písmena (např. $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{v}$) pro matice a vektory.

Kmitá-li soustava (kloubový hřídel) jedním z hlavních tvarů kmitu, je možno okamžitý vektor stavu v rotujícím systému zapsat ve tvaru součinu, $\boldsymbol{v}(x,t) = \boldsymbol{v}(x)e^{i\Omega t}$ kde $\boldsymbol{v}(x) = [v(x),\ v'(x), -M(x), -K(x)]$ je amplituda vektoru stavu (dále jen vektor stavu). Dynamický model je pak možno rozdělit na základní články popsané přenosovými maticemi, které spolu váží okrajové vektory stavu příslušného článku. Přenosové matice diskrétní hmoty $\boldsymbol{M}$, pružného uložení $\boldsymbol{K}$ a úseku kontinua $\boldsymbol{H}$ pro jeden úsek kontinua můžeme zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -J_1\Omega^2+(J_0-J_1)\omega^2 & 1 & 0\\ m(\Omega+\omega)^2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -k & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}(x)=[\boldsymbol{H_{11}}(x)|\boldsymbol{H_{12}}(x)|\boldsymbol{H_{13}}(x)|\boldsymbol{H_{14}}(x)].$$

Submatice matice $\boldsymbol{H}$ mají následující tvar

$$\boldsymbol{H_{11}}(x)=\frac{1}{\beta_1^2+\beta_1^2}\begin{bmatrix}\beta_2^2\cosh\beta_1x+\beta_1^2\cos\beta_2x\\ \beta_2^2\sinh\beta_1x-\beta_1^2\sin\beta_2x\\ EJ(\beta_1^2\beta_2^2\cosh\beta_1x-\beta_1^2\,\beta_2^2\cos\beta_2x)\\ EJ(\beta_1^2\beta_2^2\sinh\beta_1x+\beta_1^2\,\beta_2^2\sin\beta_2x)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H_{12}}(x)=\frac{1}{\beta_1^2+\beta_1^2}\begin{bmatrix}\frac{\beta_2^2}{\beta_1}\sinh\beta_1x+\frac{\beta_1^2}{\beta_2}\sin\beta_2x\\ \beta_2^2\cosh\beta_1x+\beta_1^2\cos\beta_2x\\ EJ(\beta_1\beta_2^2\sinh\beta_1x-\beta_1^2\,\beta_2\sin\beta_2x)\\ EJ(\beta_1^2\beta_2^2\cosh\beta_1x-\beta_1^2\,\beta_2^2\cos\beta_2x)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H_{13}}(x)=\frac{1}{\beta_1^2+\beta_1^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{EJ}(\cosh\beta_1x-\cos\beta_2x)\\ \frac{1}{EJ}(\beta_1\sinh\beta_1x+\beta_2\sin\beta_2x)\\ \beta_1^2\cosh\beta_1x+\beta_2^2\cos\beta_2x\\ \beta_1^3\sinh\beta_1x-\beta_2^3\sin\beta_2x\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H_{14}}(x)=\frac{1}{\beta_1^2+\beta_1^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{\beta_1}\sinh\beta_1x-\frac{1}{\beta_2}\sin\beta_2x\right)\\ \frac{1}{EJ}(\cosh\beta_1x-\cos\beta_2x)\\ \beta_1\sinh\beta_1x+\beta_2\sin\beta_2x\\ \beta_1^2\cosh\beta_1x+\beta_2^2\cos\beta_2x\end{bmatrix},$$

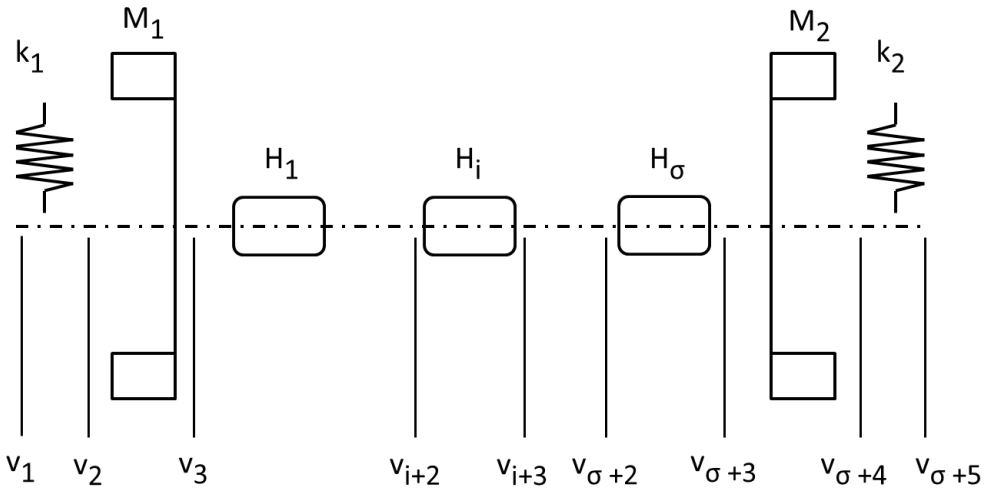
přičemž

$$J=\frac{\pi}{4}(r_2^4-r_1^4),\ \beta_1=\sqrt{-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}},\ \beta_2=\sqrt{\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}\ \text{a}\ p=\frac{\rho}{E}(\Omega^2-\omega^2),$$

$$q=-\frac{4\rho(\Omega-\omega)^2}{E(r_2^2+r_1^2)}.$$

Metoda využívá znalosti některých prvků okrajových vektorů stavu kloubového hřídele, který rozdělíme na několi úseků kontinua.

Mladá veda
Young Science
ISSN 1339-3189
Vol. 5 (4), pp. 85-92



Obr. 2 – Systém kontinuí
Zdroj: vlastní

Z vazebních vztahů mezi okrajovými vektory stavu je pak možno stanovit frekvenční rovnici. Okrajové vektory stavu dynamického modelu (obr. 1) $\boldsymbol{V_1} = [v_1(0) \quad v_1'(0) \quad 0 \quad 0]^T$ a $\boldsymbol{V_{\sigma+5}} = [v_0(l_0) \quad v_0'(l_0) \quad 0 \quad 0]^T$ (označení viz obr. 2) jsou spolu svázány vztahem $\boldsymbol{V_{\sigma+5}} = \boldsymbol{PV_1}$. Přenosovou matici $\boldsymbol{P} = \left[p_{ij}\right]_4^1$ získáme postupným násobením podle vztahu $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K_2 M_2 H_0 \dots H_i \dots H_1 M_1 K_1}$. Dosazením vektorů $\boldsymbol{V_1}$, $\boldsymbol{V_{\sigma+5}}$ a přenosové matice $\boldsymbol{P}$ do vztahu $\boldsymbol{V_{\sigma+5}} = \boldsymbol{PV_1}$ (po provedení maticového násobení) získáme soustavu homogenních rovnic $\boldsymbol{FV} = \boldsymbol{0}$, kde vektor neznámých je ve tvaru $\boldsymbol{v} = [v_1(0) \quad v_1'(0) \quad v_0(l_0) \quad v_0'(l_0)]$.
Matice soustavy má tvar

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & -1 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & -1 \\ p_{31} & p_{32} & 0 & 0 \\ p_{41} & p_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

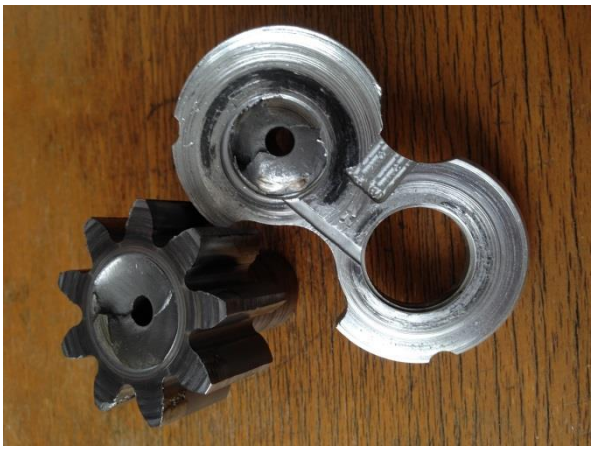
Frekvenční rovnici získáme z podmínky netriviálního řešení soustavy $\boldsymbol{FV} = \boldsymbol{0}$ ve tvaru $\det \boldsymbol{F} = 0$. Frekvenční determinat je složitou funkcí frekvence Ω. Vlastní frekvence nacházíme jako kořeny nelineární algebraické rovnice $D(\Omega) = 0$.
Kořeny této rovnice (kterých je vzhledem k fyzikální postatě problému nekonečně mnoho) nacházíme pouze v intervalu $\langle \Omega_{min}, \Omega_{max} \rangle$. V tomto intervalu počítáme funkční hodnoty funkce $D(\Omega)$ v bodech $\Omega_{min} + j\Delta\Omega$, $i = 0,1,2, \dots$ Jestliže mezi dvěma sousedními body nastane změna sigma funkce $D(\Omega)$, znamená to, že mezi těmito body leží lichý počet vlastních frekvencí. Kdežto mezi body, kde ke změně sigma funkce nedochází, leží sudý počet vlatních fekvencí (za sudé číslo považujeme i číslo *0*). Pro případy neblízkých vlastních fekvencí postačí jako krok vzít řádově setinu až tisícinu délky frekvenčního intervalu. Vlastní frekvence je možné počítat s požadovanou přesností. Jestliže změně sigma funkce $D(\Omega)$ nastala při přechodu od $\Omega_{min} + j\Delta\Omega$ k $\Omega_{min} + (j+1)\Delta\Omega$, pak interval

$\langle \Omega_{min} + j\Delta\Omega\ , \Omega_{min} + (j+1)\Delta\Omega \rangle$ procházíme s krokem rovným $^{\Delta\Omega}/_{10}$. Proces upřesňování je ukončen, jeli pro dané číslo $\varepsilon < 1$ splněno $^{D(\Omega)}/_{D(\Omega_{min})} < \varepsilon$.

Za vlastní frekvenci je pak vzata hodnota levého krajního bodu intervalu nejmenší délky, kde došlo ke změně sigma frekvenčního determinantu.
Pro porozumění numerickým výpočtům doporučujeme Ralston a Rabinowicz (2001).

Aplikace

Výše uvedenou metodu lze snadno přepsat do počítačového programu. Program má vlastnost, že lze finální model libovolně skládat ze základních prvků v jakémkoliv pořadí podle konkrétní řešené situace.



Obr. 3a, b, c - Únavový lom hřídele zubového čerpadla v důsledku cyklického zatěžování součásti při ohybu za rotace.
Zdroj: vlastní

Na obr. 3a, b, c je ukázáno poškození hřídele, které může vzniknou při zatěžování.
Výpočty vlastních frekvencí provaděné na výkonných počítačích napomáhají zjistění příčin poruchovosti u pohonů čerpadel. Výpočtový systém umožňuje na stolním počítači či Notebooku řešit izolovaně problematiku jednotlivých druhů kmitaní (torzní, krouživé, příčné) a rezonanční stavy čerpadla v systému obvodu s uvažováním vlivu frekvence cyklického zatížení, dimenzování na únavu. Z hlediska využití programu je vhodné použít volně šiřitelné výpočetní programy, které jsou dostupné i pro malé a střední strojírenské podniky.

Při výpočtu vlastních frekvencí relativního ohybového kmitání je nutno předem vypočítat vstupní parametry definující přenosovou matici pružného uložení (tuhost pružiny). Parametry definující přenosovou matici úseku kontinua lze přímo odečíst z výrobního výkresu, eventuálně to jsou materiálové konstanty (měrná hmotnost, modul pruřnosti v tahu, tlaku).

Vedle zmíněných parametrů, definujících matematický model, je nutno zadat parametry vyplývající z metody řešení. Jedná se o relativní přesnost ε (za postačující je doporučeno brát $\varepsilon = 0{,}1$, případně $\varepsilon = 0{,}01$), frekvenční interval $\langle \Omega_{min}, \Omega_{max} \rangle$, ve kterém budeme hledat vlastní frekvence s krokem $\Delta\Omega$, a provozní parametr ω.

Výpočty vlastních frekvencí relativního kmitání pro různé hodnoty ω provádíme změnou parametru ω v datovém souboru.

Závěr

Relativní příčné rozkmitání hřídele vnáší do systemu závislost frekvenčního spektra na úhlové rychlosti unášivé rotace hřídelů mechanism (čerpadla). Je to tedy evolutivní systém. Číselné rozbory ukázaly, že kritické otážky kombinovaného ohybově krouživého kmitání, otáčkové resonance, jsou až o 50 % nižší než vlastní frekvence relativního příčného kmitání při $\omega = 0$, resp. jednoduchého ustáleného krouživého kmitání kloubového hřídele, které jsou obvykle zjišťovány. Pokud se otáčková rezonance objeví v provozní oblasti, hrozí nebezpečí poruchy (trvalé ohybové deformace kloubového hřídele) v důsledků zdrojů buzení, které mají budící kruhovou frekvenci rovnu úhlové rychlosti unášivé rotace kloubového hřídele.

Výše uvedený postup lze využít při tvorbě programu na výpočty vlastních frekvencí. Vstupní parametry tohoto programu jsou:

$$n, \rho, E, k_1, k_2, m_1, m_2, J_{\zeta_1}, J_{\zeta_2}, J_{\eta_1}, J_{\eta_2},$$
$$J_{\xi_1}, J_{\xi_2}, \Omega_{min}, \Omega_{max}, \Delta\Omega, \varepsilon, \omega, l_1, r_{11}, r_{21}, l_2, r_{12}, r_{22}, \dots, l_n, r_{1n}, r_{2n}$$

Výstupním parametrem jsou vzestupně řazené vlastní frekvence relativního příčného kmitání v uvedeném intervalu, nazené se zadanou přesností.

Tento článok odporúčal na publikovanie vo vedeckom časopise Mladá veda:
Prof. RNDr. Josef Mikeš, DrSc.

Tento článek vznikl za podpory projektu TAČR č. TA04010579.

Použitá literatura

1. BREPTA, R., L. PŮST a F. TUREK, 1994. Mechanické kmitání, Praha: Sobotáles, p. 592, ISBN 80-901684-8-5
2. HRUBÝ, P., 1981. *Ohybově krouživé kmitání hřídelů v pohonech s klouby: Dissertation.* Plzeň: VŠSE.
3. HRUBÝ, P., T. NÁHLÍK a D. SMETANOVÁ, 2017. Mathematical model of combined bending-gyratory vibrations, In: Proc. MITAV (Mezinárodní konference matematika, informatika a aplikované vědy), Brno: UNOB, pp. 12
4. RALSTON, A. a P. RABINOWICZ, 2001. *A First Course in Numerical Analysis: Second Edition*, New York, Dover publications