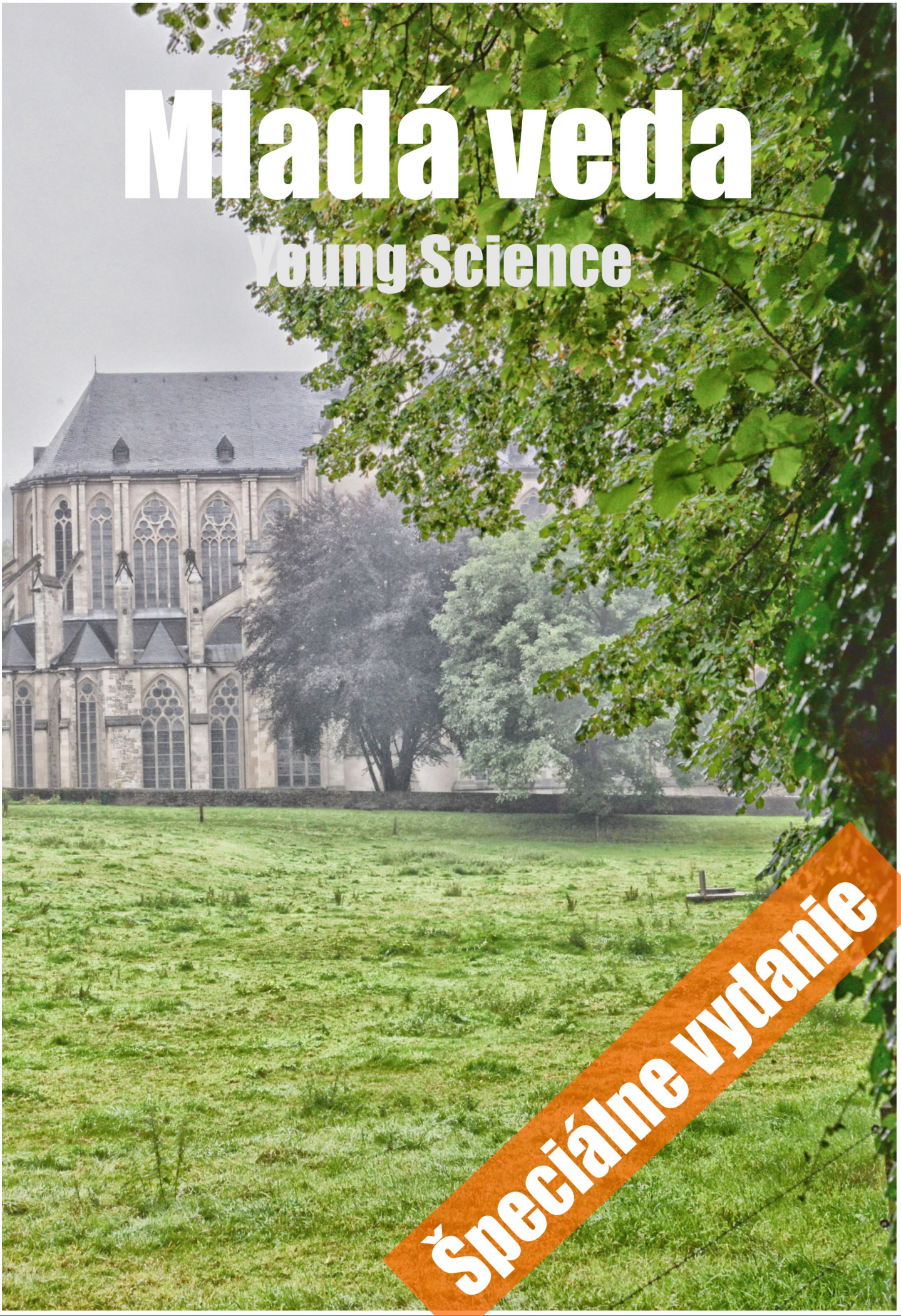
ISSN 1339-3189

September 2017

Mladá veda

Young Science



Špeciálne vydanie

www.mladaveda.sk

Mladá veda
Young Science

MEDZINÁRODNÝ VEDECKÝ ČASOPIS MLADÁ VEDA / YOUNG SCIENCE

September 2017 (číslo 4)
Ročník piaty
ISSN 1339-3189
Kontakt: info@mladaveda.sk, tel.: +421 908 546 716, www.mladaveda.sk
Fotografia na obálke: Altenberger Dom, Nemecko. © Branislav A. Švorc, foto.branisko.at

REDAKČNÁ RADA

doc. Ing. Peter Adamišin, PhD.(Katedra environmentálneho manažmentu, Prešovská univerzita, Prešov)
doc. Dr. Pavel Chromý, PhD. (Katedra sociální geografie a regionálního rozvoje, Univerzita Karlova, Praha)
prof. Dr. Paul Robert Magocsi (Chair of Ukrainian Studies, University of Toronto; Royal Society of Canada)
Ing. Lucia Mikušová, PhD. (Ústav biochémie, výživy a ochrany zdravia, Slovenská technická univerzita, Bratislava)
doc. Ing. Peter Skok, CSc. (Ekomos s. r. o., Prešov)
prof. Ing. Róbert Štefko, Ph.D. (Katedra marketingu a medzinárodného obchodu, Prešovská univerzita, Prešov)
prof. PhDr. Peter Švorc, CSc.,predseda (Inštitút histórie, Prešovská univerzita, Prešov)
doc. Ing. Petr Tománek, CSc. (Katedra veřejné ekonomiky, Vysoká škola báňská - Technická univerzita, Ostrava)

REDAKCIA

PhDr. Magdaléna Keresztesová, PhD. (Fakulta stredoeurópskych štúdií UKF, Nitra)
Mgr. Martin Hajduk (Inštitút histórie, Prešovská univerzita, Prešov)
RNDr. Richard Nikischer, Ph.D. (Ministerstvo pro místní rozvoj ČR, Praha)
Mgr. Branislav A. Švorc, PhD., šéfredaktor (Vydavateľstvo UNIVERSUM, Prešov)
PhDr. Veronika Trstianska, PhD. (Ústav stredoeurópskych jazykov a kultúr FSŠ UKF, Nitra)
Mgr. Veronika Zuskáčová (Geografický ústav, Masarykova univerzita, Brno)

VYDAVATEĽ

Vydavateľstvo UNIVERSUM, spol. s r. o.
www.universum-eu.sk
Javorinská 26, 080 01 Prešov
Slovenská republika

© Mladá veda / Young Science. Akékoľvek šírenie a rozmnožovanie textu, fotografií, údajov a iných informácií je možné len s písomným povolením redakcie.

Mladá veda
Young Science
ISSN 1339-3189

Vol. 5 (4), pp. 4-11

PROBLEMATIKA DOKAZOVÁNÍ VE STŘEDOŠKOLSKÉ MATEMATICE

PROBLEMS OF PROOFING IN SCHOOL MATHEMATICS

Karel Antoš[1]

Autor působí jako doktorand na Fakultě přírodních věd Univerzity Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem. Ve svém výzkumu se zabývá využitím výzkumného přístupu ve výuce matematiky.

The author works as a doctoral student at the Faculty of Natural Sciences of the University of Jan Evangelista Purkyně in Ústí nad Labem. In his research, he explores the research approach in teaching mathematics.

Abstrakt

Tento článek popisuje některé způsoby dokazování vhodné pro použití ve školské matematice. Pojednává o způsobech dokazování matematických tvrzení z oblasti přirozených čísel. Ukazuje, že středoškolská matematika nabízí dostatečný prostor, jak problematikou dokazování obohatit výuku. Dále ukazuje, že celá oblast přirozených čísel nabízí široký prostor k experimentování při řešení různých matematických problémů, u nichž je dokazování nedílnou součástí procesu řešení problému. V neposlední řadě je důležité připomenout, že umění použít vhodnou dokazovací metodu zvyšuje úroveň matematického myšlení studentů a obohacuje jejich vztah k matematice. V článku je ukázáno užití několika základních dokazovacích metod jako součást řešení několika vybraných problémů z oblasti přirozených čísel tak.

Klíčová slova: důkaz, přirozená čísla, matematická indukce, posloupnost, přirozená čísla

Abstract

This article describes some methods of proofing suitable for use in school mathematics. It deals with ways of proving mathematical claims from natural numbers. It shows that secondary school mathematics offers plenty of space to enrich the issue of evidence. It also shows that the whole range of natural numbers offers a wide scope for experimenting in solving various mathematical problems where proofing is an integral part of the problem-solving process. Last but not least, it is important to recall that art using the appropriate proofing method increases the level of mathematical thinking of students and enriches their

[1] Adresa pracoviště: Ing. Bc. Karel Antoš, Vysoká škola technická a ekonomická, Okružní 517/10, 370 01 České Budějovice
E-mail: antos.vste@seznam.cz

relationship to mathematics. The article presents the use of several basic proofing methods as part of the solution of several selected problems from the area of natural numbers so.
Key words: proof, natural numbers, mathematical induction, sequence, natural numbers

Úvod

Oblast středoškolské matematiky přináší celou řadu možností, jak bádat, objevovat a řešit různé matematické problémy, jak k nim nacházet nová řešení, a jak jejich platnost posléze ověřovat a dokazovat. Při objevování vyslovíme celou řadu různých hypotéz a tvrzení, která se však musejí nejprve dokázat, a až potom z nich můžeme formulovat věty. Zvláště oblast přirozených čísel nabízí velký prostor pro uplatnění invence při zkoumání a experimentování s operacemi s čísly, Kopka (2013).

Podle Kopky (2005) jedním z důležitých cílů školské matematiky je naučit studenty řešit matematické problémy. Problémem je nějaká situace, kterou chceme vyřešit a k tomuto řešení hledáme způsoby a cesty.

Problém má tři hlavní složky:

1. Výchozí situace
2. Cíl, kterého chceme dosáhnout
3. Cesta od výchozí situace k cíli

Obr. 1: Schéma řešení problému

Dále je nutno určit, jak se problém dá řešit, určit strategie řešení problémů, vyslovovat hypotézy a tyto dokazovat. Po důkazu se z počáteční hypotézy stává matematická věta.

Průběh tohoto procesu by mohl schematicky vypadat následujícím způsobem:

Matematická situace (problém) → experimentování → hypotéza → ověření → důkaz (odpověď).

Nedílnou součástí procesu řešení problému je podle Kopky (2005) dokazování. Dokazování je podle předchozího schématu posledním krokem v celém procesu, protože pokud vyslovené tvrzení dokážeme, stává se tím matematickou větou.

Nedílnou a důležitou součástí řešení je potom dokazování, protože až po důkazu můžeme zkoumanou hypotézu převést na matematickou větu. Způsobů dokazování je celá řada, při výběru zvolíme ten, který se z hlediska dokazovaného tvrzení jeví nejvíce vhodný. Obvykle jako první důkaz, který se nabízí k použití, je důkaz matematickou indukcí.

Důkaz matematickou indukcí vychází z charakteru přirozených čísel, proto se při důkazech tvrzení z oblasti přirozených čísel k tomuto důkazu přikloníme asi nejčastěji, navíc tento důkaz je obecně vhodný tehdy, kdy ostatní důkazy se použít spíše nedají, Antoš (2015).

Pro studenty není až tak složité důkaz pomocí indukce vytvořit, ale spíše pochopit ideu jeho podstaty. Ukážeme si, jak se důkaz matematickou indukcí dá použít na celé řadě příkladů, se kterými se studenti při řešení problémů mohou setkat. Na problémech, kde to bude možné, si

ukážeme i jiné možnosti dokazování, které budou využívat celou řadu dovedností při operacích s čísly. Tím rozšíříme oblast bádání a poznání, do které mohou studenti při zkoumání problémů pronikat.

Nejprve ukážeme řešení problému hledání největšího společného dělitele čísel generovaných daným polynomem, Calda (2005). Cílem zde nebude přímo řešení zadaného příkladu, ale popis možností dokazování zjištěné hypotézy.
Při řešení několika vybraných problémů si ukážeme, jak by se daný problém dal řešit nejen pomocí matematické indukce, ale i dalšími dokazovacími postupy.

Metody dokazování

Důkaz matematickou indukcí – princip

Matematická indukce (MI) je metoda dokazování matematických vět a tvrzení podle Poláka (2008), která se používá, pokud chceme ukázat, že dané tvrzení platí pro všechna přirozená čísla, případně pro danou nekonečnou posloupnost. Typicky se užívá k důkazům těch tvrzení o přirozených číslech, u nichž je snadné ověřit, že platí pro číslo 1, a zároveň lze platnost pro každé dané *n* převést v konečně mnoha krocích na platnost pro 1 s tím, že počet těchto kroků s rostoucím *n* také roste.
Formulace matematické indukce tedy může být následující:
Nechť $V(x)$ je tvrzení, u kterého chceme ukázat, že platí pro všechna přirozená čísla. Dosadíme-li do formule $V(x)$ za proměnnou *x* číslo 1, dostaneme pravdivý výrok a nechť pro libovolné přirozené číslo *x* je pravdivá implikace $V(x) \Rightarrow V(x+1)$. Pak formule $V(x)$ platí pro všechna přirozená čísla.

V důkazu věty $(\forall x)(V(x))$ proto postupujeme takto [4]:
1. Dokážeme, že platí $V(1)$.
2. Dokážeme, že platí $(\forall x)V(x) \Rightarrow V(x+1)$.
To ale znamená, že jsme dokázali platnost konjunkce $V(1) \wedge (\forall x)(V(x) \Rightarrow V(x+1))$.

Dalším typem důkazu, který v oblasti přirozených čísel můžeme k dokazování využít, je důkaz přímý. Zvláště tam, kde dokazované tvrzení je ve tvaru, který můžeme vhodnými a platnými úpravami upravit tak, že ze získaného tvaru je platnost výroku vidět.

Důkaz přímý - princip

Přímý důkaz se v matematice používá k dokazování matematických vět tvaru implikace $P \to TP \to T$, tj. vět tvaru *„Jestliže platí předpoklad P, pak platí také tvrzení T“*. Spočívá v tom, že z platnosti výroku *P* se řadou platných implikací odvodí platnost výroku *T*.

Důkaz matematickou indukcí si ukážeme na prvním problému, kterým je nalézt vzorec pro *n*–tý člen posloupnosti, když je zadána rekurentně, podle Odvárka (1990). Nejprve se musí nalézt tvar tohoto vzorce, což se vyřeší pomocí experimentování. V dalším kroku se musí platnost tohoto vzorce dokázat, což je cílem naší ukázky.

Problém 1: Posloupnost (a_n) je zadaná rekurentně: $a_1 = 3$; $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$. Vyjádřete ji vzorcem pro její n-tý člen.

Řešení: vypočítáme několik prvních členů naší posloupnosti.

Experimentování:
Pro $n = 1, 2, 3, 4, 5\ldots$ vypočítáme několik prvních členů naší posloupnosti a zapíšeme je do tabulky. Tyto členy budeme zkoumat a pokusíme se je rozložit tak, aby z rozkladu byl patrný vztah pro daný člen a číslo n, které udává pořadí toho daného členu. Tento krok bude patrně nejobtížnější částí řešení celého problému, protože vyžaduje určitou zkušenosti s podobnými operacemi s čísly a pravděpodobně budou studenti potřebovat určitou míru pomoci od učitele.

n	a_n	**rozklad**	**upravený rozklad**
1	3	3	1·1+2
2	7	3+2·1+2	2·2+3
3	13	7+2·2+2	3·3+4
4	21	13+2·3+2	4·4+5
5	31	21+2·4+2	5·5+6
6	43	31+2·5+2	6·6+7
n			***n*·*n*+(*n*+1)**

Tabulka 1

Hypotéza: $(\forall n \in N) a_n = n^2 + (n+1)$

Důkaz 1: provedeme důkaz matematickou indukcí

1. Dokážeme, že hypotéza platí pro $n = 1$
   - platí, viz předchozí experimentování s výsledky v tabulce
2. Nyní musíme dokázat, že když vzorec platí pro n, pak platí i pro $n + 1$
   $(\forall n \in \mathrm{N})\ [a_n = n^2 + (n+1) \Rightarrow a_{n+1} = (n+1)^2 + (n+2)]$

Nechť n je určité přirozené číslo, pro které platí indukční předpoklad, tzn., že $a_n = n^2 + (n+1)$. Pak

$$a_{n+1} = a_n + 2n + 2 = n^2 + (n+1) + 2n + 2 = (n^2 + 2n + 1) + (n+2)$$
$$= (n+1)^2 + (n+2)$$

V úpravách jsme vyšli z definice $(n+1)$–ho členu, pro výraz a_n jsme použili indukční předpoklad $a_n = n^2 + (n+1)$, výsledný tvar jsme upravili a získali tvar, který jsme chtěli dokázat.

Nyní se pokusíme hypotézu dokázat pomocí důkazu přímého.

Důkaz 2: provedeme důkazem přímým

Vyjdeme z rekurentního zápisu posloupnosti: $a_1 = 3$; $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$. Platnými úpravami převedeme tento tvar do tvaru, který jsme na počátku stanovili hypotézou.

Tvar pro $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$ upravíme do tvaru $a_n = a_{n-1} + 2(n-1) + 2$. Tento tvar potom budeme upravovat následujícími úpravami takto:

$$\begin{aligned} a_n = a_{n-1} + 2(n-1) + 2 &= (a_{n-2} + 2(n-2) + 2) + 2(n-1) + 2 \\ &= \big((a_{n-3} + 2(n-3) + 2) + 2(n-2) + 2\big) + 2(n-1) + 2 = \cdots = \\ &= \big((a_1 + 2 \cdot 1 + 2) + 2 \cdot 2 + 2\big) + \cdots + 2(n-1) + 2 = \\ &= a_1 + 2(n-1) + 2\big(1 + 2 + \cdots + (n-1)\big) = \\ &= a_1 + 2(n-1) + 2\frac{n(n-1)}{2} = a_1 + 2(n-1) + n(n-1) = \\ &= a_1 + (n-1)(n+2) = a_1 + n^2 + n - 2 = 3 + n^2 + n - 2 = \\ &= n^2 + n + 1 \end{aligned}$$

Při úpravách jsme použili tzv. Gaussův trik:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = (100 + 1) + (99 + 2) + \cdots + (51 + 50) = 50 \cdot 101$$

Obecně zapsáno: $1 + 2 + \cdots (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Tedy jsme matematickou indukcí i důkazem přímým dokázali, že naše posloupnost se dá vyjádřit vzorcem $a_n = n^2 + (n+1)$, proto můžeme naši hypotézu převést na větu.

Věta:

$(\forall n \in N) a_n = n^2 + (n+1)$

Analogickým způsobem jako v problému 1 budeme postupovat i při řešení dalšího problému z oblasti přirozených čísel. Ukážeme, jak se jedno tvrzení dá dokázat několika různými dokazovacími postupy. Uvidíme, že důkaz pomocí MI je sice použitelný v podobných příkladech obecně, ale že například důkaz přímý zde vede k cíli pouze v několika jednoduchých krocích. Dokazování začneme důkazem sporem, který můžeme považovat za variantu důkazu nepřímého.

Důkaz sporem - princip:

V důkazu sporem dokážeme, že předpoklad nepravdivosti původního tvrzení vede k nesmyslnému výsledku, tedy ke sporu. V důsledku to znamená, že je-li dokazované tvrzení nepravdivé, je pravdivá jeho negace. Důkaz sporem provádíme ve třech krocích. Nejdříve provedeme negaci A' původního výroku A. Poté vytvoříme řetězec implikací $A' \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2, \ldots, \Rightarrow B_{n-1} \Rightarrow B_n$, kde výrok B_n neplatí, což je logický spor. Zjistíme, že negovaný výrok A' neplatí, a proto platí původní výrok A.

Problém 2:
Určete v množině N platnost následujícího tvrzení: $(\forall n \in \mathrm{N}): 2|(n^3 - 11n)$.

Důkaz 1: důkaz sporem
V důkazu sporem budeme předpokládat, že platí negace dokazovaného výroku, tj. že platí $(\exists n \in \mathrm{N}): 2 \nmid (n^3 - 11n)$
Vyjdeme z předpokladu, že každé přirozené číslo n je buď sudé, nebo liché.
Je-li číslo n sudé, tak je můžeme zapsat ve tvaru $2k$, kde $k \in N$. Dosadíme $2k$ za n do dokazovaného tvrzení a dostaneme $(2k)^3 - 11(2k)$. Tento tvar dále upravíme do tvaru $8k^3 - 22k$, což je sudé číslo, protože rozdíl dvou sudých čísel je sudé číslo. To je ale v rozporu s naším předpokladem, že 2 nedělí $(n^3 - 11n)$. Tím platí původní předpoklad, že výraz $(n^3 - 11n)$ je číslo sudé a tedy dělitelné dvěma. Je-li číslo n liché, tak je můžeme zapsat ve tvaru $2k - 1$, kde $k \in N$.
Opět dosadíme $2k - 1$ za n do dokazovaného tvrzení a dostaneme tvar $(2k - 1)^3 - 11(2k - 1)$. Tento tvar dále upravíme $(2k-1)^3 - 11(2\mathrm{k} - 1) = 8k^3 - 12k^2 + 6k - 1 - 22k + 11 = 8k^3 - 12k^2 - 16k + 16$. Toto je opět sudé číslo, protože každý jednotlivý sčítanec je rovněž sudé číslo a jejich součet dá sudé číslo. To je ale opět v rozporu s naším předpokladem, že 2 nedělí $(n^3 - 11n)$. Tím opět platí původní předpoklad, že výraz $(n^3 - 11n)$ je sudé číslo a tedy dělitelné dvěma.

Závěr: v obou případech jsme při předpokladu, že platí $(\exists n \in \mathrm{N}): 2 \nmid (n^3 - 11n)$, došli ke sporu a zkoumaný výrok v tomto tvaru je nepravdivý. Platí proto jeho negace, tedy původní výrok $(\forall n \in \mathrm{N}): 2|(n^3 - 11n)$, což je věta, kterou jsme chtěli dokázat.

Důkaz 2: důkaz matematickou indukcí
V důkazu MI budeme předpokládat, že pro všechna přirozená čísla platí
$(\forall n \in \mathrm{N}): 2|(n^3 - 11n)$
V důkazu matematickou indukcí budeme postupovat takto:
1. Dokážeme, že hypotéza platí pro $n = 1$
   - dosadíme číslo 1 za n. Potom je $(1^3 - 11 \cdot 1) = 1 - 11 = -10$, což je číslo dělitelné dvěma.
2. Dokážeme, že když vztah platí pro číslo n, tak potom platí i pro číslo $n + 1$
   $(\forall n \in \mathrm{N}): (2|(n^3 - 11n) \Rightarrow 2|(n+1)^3 - 11(n+1))$

Nechť n je určité přirozené číslo, pro které platí indukční předpoklad, tzn., že $2|(n^3 - 11n)$. Pak
$(n+1)^3 - 11(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 11n - 11 = n^3 - 11n + 3n(n+1) - 10$
Zde vidíme, že první dva sčítance $(n^3 - 11n)$ jsou dělitelné dvěma podle indukčního předpokladu. Dále druhé dva sčítance jsou dělitelné upravené do tvaru $3n(n + 1)$ vyjadřují dvě po sobě jdoucí čísla, z nichž jedno je určitě dělitelné dvěma, tudíž celý tvar je rovněž dělitelný dvěma. A poslední člen výsledného polynomu je číslo 10, tedy číslo dělitelné dvěma. Výsledný polynom je tedy celý dělitelný dvěma.

Tím jsme ukázali, že když vtah platí pro *n*, platí i pro (n + 1). Dokázali jsme tak matematickou indukcí, že předpokládané tvrzení platí, tj. $(\forall n \in N): 2 \mid (n^3 - 11n)$.

Důkaz 3: důkaz přímý

V důkazu přímém upravíme zadaný polynom pomocí algebraických pravidel do tvaru, z něhož bude dělitelnost dvěma zřejmá.

$(n^3 - 11n) = n^3 - 11n + n - n = n^3 - n - 10n = n(n^2 - 1) - 10n = n(n+1)(n - 1) - 10n = (n-1)n(n+1) - 10n$

První sčítanec obsahuje tři po sobě jdoucí čísla, z nichž alespoň jedno bude dělitelné dvěma, druhý sčítanec je rovněž dělitelný dvěma. Celý polynom je tedy ve výsledku dělitelný dvěma a tak jsme i tímto důkazem dokázali, že předpokládané tvrzení platí.

Zde jsme třemi druhy důkazů dokázali, že předpokládané tvrzení platí. Je nutno poznamenat, že důkaz sporem, který jsme použili jako první typ důkazu, je v tomto případě použit trochu násilně, protože ve srovnání s druhými dvěma typy důkazů je jeho postup komplikovaný a naopak důkaz přímý vede k cíli jednodušším způsobem

Závěr

V článku Přístupy k dokazování ve středoškolské matematice jsme si na problematice dokazování matematických tvrzení v oblasti přirozených čísel ukázali, jak se v rámci učiva středoškolské matematiky dá studentům přiblížit problematiky dokazování. Ukázali jsme, že při řešení matematického problému je důkaz posledním článkem v celém procesu. Na uvedených příkladech jsme také ukázali, jak jedno a též tvrzení lze dokázat několika dokazovacími metodami. Vhodnost příslušné dokazovací metody závisí na konkrétní podobě dokazovaného tvrzení a zkušenosti řešitele daného problému. Porovnali jsme vždy několik dokazovacích metod z hlediska jejich obecného řešení i z hlediska nutnosti na znalost určitých matematických triků. Vedle cíle článku, kterým bylo ukázat na možnosti dokazování v oblasti přirozených čísel v oblasti středoškolské matematiky, jsme rovněž chtěli přiblížit, jaké možnosti skrývá v sobě matematika z hlediska tvůrčích přístupů, které žák či student může při řešení problémů využít, podle Frobishera (1994). Chtěli jsme také ukázat, že student může být i samostatným tvůrcem nových matematických postupů a že může svá originální řešení přímo i sám vytvářet.

Tento tvůrčí přístup by měl být na hodinách matematiky na všech stupních škol rozvíjen. Proto je zde nezastupitelná role učitele, který by měl žákům a studentům tyto cesty ukazovat a s nimi je rozvíjet, aby při řešení matematických problémů dokázali co nejvíce tento tvůrčí aspekt matematiky využívat a problémy samostatně řešit.

Tento článok odporúčal na publikovanie vo vedeckom časopise Mladá veda: Ing. Jiří Čejka, Ph.D.

Použitá literatura

1. CALDA, E., PETRÁNEK, O., ŘEPOVÁ, J. Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť. Praha: Prometheus, 2006. ISBN 80-7196-041-1.
2. POLÁK, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-356-1.
3. KOPKA, J. Umění řešit matematické problémy. Ústí n. Labem: UJEP, 2013. ISBN 978-80-903625-5-0.

4. KOPKA, J. Zkoumání ve školské matematice. Ružomberok: Katolická Univerzita, 2005. ISBN 80-8084-064-4.
5. Odvárko, O. a kol.: Metody řešení matematických úloh. Praha, SPN 1990. ISBN 80-04-20434-1.
6. ANTOŠ, K. Jak řešit problém hledání největšího společného řešitele, Trendy ve vzdělávání, 1/2015. UPAL Olomouc, ISSN 1805-8949.
7. FROBISHER, L. Problems, Investigation and Investigative Approach. In: Issue in Teaching Mathematics. Cassel London 1994.